Задачи Арнольда

Я очень благодарен большому числу своих
бывших и нынешних учеников,
написавших эту книгу.

В.И. Арнольд

Задачи
Арнольда

ФАЗИС
Москва 2000

УДК 51

Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 98-01-14146

Издание поддержано фондом
«КНИГА–НАУКА–КУЛЬТУРА»

Задачи Арнольда.
— М.: ФАЗИС, 2000. — X+454 с.

ISBN 5-7036-0060-X

В книге собраны задачи выдающегося математика современности академика В.И.Арнольда, которые он ставит своим ученикам уже более 40 лет. Ко многим задачам приведены комментарии, содержащие обзор результатов по данному направлению исследований. Широта охвата самых различных разделов математики делает издание уникальным и обозначающим передний край развития науки.

Книга адресована широкому кругу специалистов в области математики и смежных наук, а также аспирантам и студентам старших курсов.

Издательство ФАЗИС (ЛР № 064705 от 09.08.96)
123557 Москва, Пресненский вал, 42-44. E-mail: phasis@aha.ru

ППП Типография «Наука» Академиздатцентра РАН
121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6
Заказ № 1570

ISBN 5-7036-0060-X

Оглавление

Поставить правильный вопрос
труднее, чем решить его.

Георг Кантор

Предисловие редактора и издателя

В настоящем издании собраны задачи, которые на протяжении более сорока лет ставились Владимиром Игоревичем Арнольдом.

В основном, это весьма полное собрание задач, которыми он дважды в год начинает (после каникул) свой семинар по теории особенностей дифференцируемых отображений. (Этот знаменитый семинар работает на мехмате МГУ уже более 30 лет и по праву может считаться одним из мировых центров математических исследований.) Кроме того, это задачи, опубликованные Владимиром Игоревичем в своих многочисленных статьях и книгах. Очевидно, однако, что нам не удалось пока собрать вместе все задачи Арнольда, и мы будем благодарны читателям, которые сообщат нам о задачах, не вошедших в настоящее издание.

Книга состоит из двух частей. В первой приведены условия задач; краткие пояснения, набранные курсивом, принадлежат автору. Во второй части собраны комментарии, содержащие обзор полученных результатов по данной задаче и, иногда, историческую справку. Практически все комментарии подписаны их составителями (как правило, учениками Владимира Игоревича); неподписанные краткие комментарии принадлежат автору или редактору. В отдельных случаях комментаторы включили в свои комментарии описания своих неопубликованных и непроверенных результатов, иногда относящихся к классическим проблемам; читателю следует рассматривать эти утверждения как гипотезы. Библиография ко всем комментариям тщательно проверена редактором.

Ради исторической объективности мы оставляем в книге задачи-близнецы, — которые, хотя и относятся к разным годам, но практически повторяют друг друга. В этих случаях подробно комментируется только одна из таких задач (не обязательно самая ранняя), а остальные задачи-близнецы снабжаются ссылкой: «См. комментарий к задаче ⟨*номер*⟩». Подобные ссылки используются также и в других случаях, когда информация, приведенная в комментарии к одной задаче, относится и к другой.

Все математические обозначения в книге общепринятые. Однако обозначения сфер и шаров разных размерностей следует оговорить особо. Непараллелизуемые n-мерные сферы (т. е. при $n \notin \{0, 1, 3, 7\}$) всегда обозначаются через S^n. Сферы размерностей $n = 0, 1, 3, 7$, как правило, обозначаются через $\mathbb{S}^n$, но в ряде случаев (специально указанных редактору В. И. Арнольдом или, например, когда речь идет о букете сфер $S^2 \vee S^1$) — тоже через S^n. Замкнутый шар размерности $n \geqslant 3$ обозначается через B^n. Для двумерного шара (диска), как правило, используется обозначение D^2. Наконец, одномерный шар (отрезок) $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ мы обозначаем через $[a; b]$.

Мы надеемся, что читатель догадывается о той непростой работе, которую пришлось проделать при подготовке книги к изданию, и мы благодарим всех участников этого проекта, в первую очередь — авторов комментариев. Мы не вполне удовлетворены качеством нашей собственной работы, но стремление скорее выпустить книгу в свет победило. Многие задачи остались без комментариев; за исключением нескольких случаев это означает лишь то обстоятельство, что никто пока не взял на себя труд подготовить соответствующий комментарий.

В то же время мы считаем, что реализация настоящего проекта только начата, и мы будем признательны всем, кто своими замечаниями, предложениями, уточнениями, новыми комментариями или историческими справками окажет содействие подготовке нового издания этой книги.

М. Б. Севрюк
В. Б. Филиппов

Москва, 1999

Мир держится на детях,
которые учатся.

Роже Пейрефит

Предисловие автора

Москва давно славится своими математическими семинарами. Обычно в начале семестра я формулирую десяток-другой задач. Анализ последующего показывает, что среднее время полураспада задачи (после которого она обычно более или менее решена) — порядка *семи лет.*

Пуанкаре говорил, что *точно* сформулировать в виде вопроса, допускающего ответ типа «*да*» или «*нет*», можно только *малоинтересные* задачи. По-настоящему интересные вопросы так не решаются: они приводят к *постепенному* продвижению вперед, к *непрерывному* развитию.

Главное в задаче — по мнению Пуанкаре — это понять, что́ важно в ее условии, а *что́ можно менять* (подобно граничным значениям в эллиптической задаче).

И. Г. Петровский, один из моих учителей в математике, учил меня, что самое главное, что́ ученик должен узнать от учителя — это что некоторый *вопрос еще не решен.* Дальнейший выбор вопроса из нерешенных — дело самого ученика. Выбирать за него задачу — всё равно, что выбирать сыну невесту.

Я, особенно в шестидесятые годы, почти не записывал своих задач, поэтому большинство из них, вероятно, потеряно. Некоторые задачи вошли в тексты статей и книг. Некоторые задачи к семинару я узнавал в беседах с друзьями и коллегами. Надеюсь, что ниже в большинстве таких случаев авторы цитируются.

Есть два основных способа формулировать математические утверждения (задачи, гипотезы, теоремы, . . .): русский и французский. *Русский способ* состоит в том, чтобы выбрать *наиболее простой и конкретный* случай (так, чтобы никто не мог упростить формулировку, сохраняя суть дела). *Французский способ* состоит в том, чтобы *обобщить утверждение настолько, чтобы никто не мог его обобщить дальше.*

Я полагаю, что это деление более или менее соответствует делению людей на правополушарных решателей поставленных задач и левополушарных авторов программ исследований.

Будучи студентом младшего курса, я задал однажды вопрос аспиранту Р. Л. Добрушину. «Один дурак может задать столько вопросов, что и сто умных не смогут ответить», — сказал Добрушин. Я думаю, лучше всё же публиковать вопросы. Между прочим, оказалось, что вопрос, который я тогда задал Добрушину — *можно ли увеличить периметр прямоугольника последовательностью складываний* — не решен и сегодня и считается «фольклорным» (хотя я, мне кажется, опубликовал его лет эдак 40 назад).

Я. Б. Зельдович считал, что постановка задачи — искусство куда более тонкое, чем решение. «*Стóит точно сформулировать вопрос*, — говорил он, — *как тотчас найдется подходящий математик для решения.* Ведь *математики, они как мухи,* — умеют ходить по потолку!»

Это привело его к известным битвам, где Понтрягин с Логуновым пытались придраться к математической строгости его теорий. Битвы закончились строчкой в книге Понтрягина: «Некоторые физики считают, что математический анализ можно правильно применять, не всё зная о его обосновании. Я с ними согласен.»

Зельдович был этой строчкой обижен: «Почему он не назвал меня по фамилии?» — сказал мне тогда Яков Борисович.

Я очень благодарен большому числу своих бывших и нынешних учеников, написавших эту книгу. Я постарался исправно их цитировать.

Обычно обучение математике в Москве начинается до школы. Вот пара примеров (дети 4–5 лет решают их за полчаса):

1) Из бочки вина перелили ложку в стакан чая, а потом из стакана — ту же ложку полученного коктейля в бочку. Где теперь больше объем посторонней жидкости?

2) От шахматной доски отрезали два противоположных уголка (a1, h8). Можно ли покрыть 62 оставшихся поля (без перекрытий) 31-й доминошкой, покрывающей 2 поля (соседних)?

Лейбниц думал, что кривая пересекается со своей окружностью кривизны в четырех бесконечно-близких точках и что $d(ab) = (da)(db)$.

Гильберт настаивал на том, что по-настоящему интересная математическая работа редко бывает правильной. Например, в своем очерке теории относительности он утверждает, что «*одновременность* существует сама по себе». Его описание геометрии чисел в статье о Минковском и вовсе не выдерживает никакой критики.

А. Вейль пишет, что его знаменитую диссертацию прочли лишь двое оппонентов, да и те мало что поняли вследствие недостатка своей квалификации (она была ошибочной). И это — одна из важнейших работ (1926–1928) нашего века по теории чисел.

Ошибки самого Пуанкаре слишком знамениты, чтобы о них здесь писать: он путал гомологии с гомотопиями и прозевал носящее его имя трехмерное многообразие додекаэдрического линзового типа. Многие «решенные» им вопросы теории дифференциальных уравнений, динамических систем и небесной механики всё еще открыты.

«Если я и вижу в природе какую-либо пустоту, то только лишь в голове у Паскаля», — писал Декарт Гюйгенсу.

Математик N отказался исправить опечатки при переиздании своей книги, чтобы не лишать читателя удовольствия находить его ошибки.

Кажется, Наполеон говорил, что человека, не умеющего *думать*, нельзя ничему и научить.

Я надеюсь, что настоящая книга научит думать хоть кого-нибудь (хотя бы приведенными выше задачами 1 и 2).

В. И. Арнольд

Гарш (Франция), 1999

К чему воплощать замыслы в жизнь,
коль скоро сам по себе замысел
приносит столько радости?

Шарль Бодлер

Условия задач

1956

1956-1. «Задача о мятом рубле»: можно ли увеличить периметр прямоугольника последовательностью складываний?

1958

1958-1. Рассмотрим разбиение отрезка $[0;1]$ на три отрезка Δ_1, Δ_2, Δ_3 и переложим их в порядке Δ_3, Δ_2, Δ_1. Исследовать получившуюся динамическую систему $[0;1] \to [0;1]$: верно ли, что скорость перемешивания и другие подобные эргодические характеристики одинаковы при почти всех длинах $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ отрезков разбиения?

Аналогичный вопрос можно задать и для n отрезков и для любых перестановок (причем можно также допускать изменение ориентации части отрезков).

1958-2. Пусть в тетраэдре площади всех четырех граней равны. Доказать, что равны длины противоположных ребер (и все грани конгруэнтны!). *Идея очень проста: развернем, разрезав по трем ребрам из вершины.*

1958-3. Найти многомерную версию гипотезы Гильберта о числе предельных циклов. *Например, интересно число интегральных кривых, соединяющих два алгебраических или инвариантных многообразия и достаточно «монотонных».*

1959

1959-1. Пусть $z \mapsto z + a + b\sin z \mod 2\pi$ — биголоморфное отображение окружности $\operatorname{Im} z = 0$ на себя, аналитически не сопряженное повороту, но имеющее иррациональное число вращения. Верно ли, что в любой окрестности окружности есть периодическая орбита?

1963

1963-1. Имеется ли действительная неустойчивость в многомерных задачах теории возмущений, когда инвариантные торы не делят фазовое пространство?

1963-2. Доказать наличие невырожденных гиперболических точек (и расщепление сепаратрис) в любой окрестности эллиптической неподвижной точки 0 общего аналитического отображения $(\mathbb{R}^2, 0) \hookleftarrow$, сохраняющего площади.

1963-3. Имеются ли в задаче трех (и n) тел при любых значениях масс и сравнимых друг с другом взаимных расстояниях ограниченные движения, заполняющие множество положительной меры? Существует ли критическое значение параметра возмущения μ, при котором инвариантный тор с данным диофантовым набором частот разрушается?

1963-4. Пусть T — сохраняющий ориентацию аналитический диффеоморфизм окружности на себя с диофантовым числом вращения ω. Всегда ли можно аналитической заменой переменной S превратить T в поворот T_0 на угол $2\pi\omega$: $STS^{-1} = T_0$?

1963-5. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с условно-периодическими коэффициентами

$$\dot{q} = \omega, \quad \dot{x} = A(q)x; \qquad q \in \mathbb{T}^k = \mathbb{R}^k/2\pi\mathbb{Z}^k, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $\omega \in \mathbb{R}^k$ — постоянный вектор с диофантовыми компонентами, а $A\colon \mathbb{T}^k \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ — аналитическая функция. Всегда ли такая система приводима при $k > 1$, $n > 1$?

1963-6. Пусть Γ — (вообще говоря, некоммутативная) группа с конечным числом образующих $a_1, \ldots, a_s$. Динамической системой с «временем» Γ назовем *действие* группы Γ на пространстве с мерой Ω

сохраняющими меру преобразованиями A_γ ($\gamma \in \Gamma$). Для такой системы можно определить временны́е средние следующим образом. Рассмотрим совокупность Γ_n элементов Γ, получающихся n (но не меньше, чем n) умножениями из $a_1, a_1^{-1}, \ldots, a_s, a_s^{-1}$, и пусть число таких элементов равно $N(n)$. Тогда «временно́е среднее» $f_n(x)$ функции $f(x)$, $x \in \Omega$, определим как

$$f_n(x) = \frac{1}{N(n)} \sum_{\gamma \in \Gamma_n} f(A_\gamma x).$$

Пусть теперь Ω — однородное пространство, на котором транзитивно действует компактная группа Ли G, и пусть преобразования A_γ ($\gamma \in \Gamma$) принадлежат G.

Справедливы ли эргодические теоремы Биркгофа и Неймана для таких динамических систем с некоммутативным временем?

Динамическим системам (Ω, G, Γ) с некоммутативным временем Γ посвящены и последующие три задачи.

1963-7. Для ряда групп Γ удается доказать, что последовательность точек $A_\gamma x$ равномерно распределена в своем замыкании, если только оно связно; иначе говоря, временны́е средние $f_n(x)$ непрерывной функции сходятся к пространственному среднему по замыканию $\overline{\Gamma(x)}$ траектории $A_\gamma x$ ($\gamma \in \Gamma$):

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{\operatorname{mes}\overline{\Gamma(x)}} \int\limits_{\overline{\Gamma(x)}} f(y)\, d\mu(y).$$

Примерами являются свободная группа Γ с двумя образующими a, b и группа Γ с образующими a, b, c и соотношением $abc = e$.

Распространяется ли этот результат на произвольные группы Γ с конечным числом образующих?

1963-8. Распространяется ли результат, указанный в предыдущей задаче, на некомпактный случай? (Например, пусть Ω — плоскость Эвклида или Лобачевского.)

1963-9. Каково обобщение результата, указанного в задаче *1963-7*, на случай, когда роль времени играет группа Ли, например, группа движений плоскости Лобачевского?

1963-10. В каких случаях группа монодромии системы $dx = [A(z)\,dz]x$ линейных дифференциальных уравнений на римановой поверхности M ограничена? Здесь $z \in M$, $x \in \mathbb{C}^n$, а $A(z)\,dz$ — матрица из дифференциалов, зависящая от z аналитически, исключая конечное число особых точек.

1963-11. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений $dx/dz = A(z)x$, где $z \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1$, $x \in \mathbb{C}^n$, а A — матрица, зависящая от z аналитически, исключая 3 особые точки z_1, z_2, z_3 на сфере Римана $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$. Обозначим $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$ через Z. Если группа монодромии системы $dx/dz = A(z)x$ ограничена, то эта система имеет однозначный первый интеграл $(B(z)x, \overline{x}) = \mathrm{const}$, где $B(z)$ — положительно определенная самосопряженная матрица, однозначная при $z \in Z$.

Верно ли, что поверхность, изображающая решения нашей системы в $(2n+1)$-мерном многообразии $M_c : (Bx, \overline{x}) = c$, равномерно распределена по отношению к следующей метрике: на Z вводится метрика постоянной отрицательной кривизны, а на $\mathbb{C}^n(z)$ метрику определяет скалярное произведение $(B(z)x, y)$?

1963-12. Систему $dx/dz = A(z)x$, о которой шла речь в предыдущей задаче, можно рассматривать как динамическую систему, в которой роль времени играет универсальная накрывающая Z, т. е. плоскость Лобачевского. Но с ней можно связать также обыкновенную динамическую систему с непрерывным временем. С этой целью рассмотрим в качестве точки нового фазового пространства точку $(z, x) \in M_c$ вместе с направлением ξ вектора, касательного к Z в z. Движение определим так: точка z движется равномерно по геодезической направления ξ, а x над z — в соответствии с уравнениями $dx/dz = A(z)x$. Метрика и инвариантная мера определены в предыдущей задаче.

Указанная конструкция позволяет «умножать» поток, заданный на многообразии, на группу автоморфизмов (являющуюся представлением фундаментальной группы многообразия). Задача состоит в изучении получающихся «произведений».

1965

1965-1. Пусть $A\colon \Omega \to \Omega$ — глобально канонический гомеоморфизм $2n$-мерного торического кольца $\Omega = \mathbb{T}^n \times B^n$, где $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ — n-мерный тор, а $B^n \subset \mathbb{R}^n$ — область в $\mathbb{R}^n$, гомеоморфная замкнутому n-мерному шару. Пусть p_0 — внутренняя точка области B^n, а $T \subset \Omega$ — тор $\mathbb{T}^n \times \{p_0\}$. Всегда ли T и AT пересекаются не менее чем в $n+1$ (геометрически различной) точке?

1965-2. Пусть $A\colon \Omega \to \Omega$ — глобально канонический диффеоморфизм $2n$-мерного торического кольца $\Omega = \mathbb{T}^n \times B^n$, где $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ — n-мерный тор, а $B^n \subset \mathbb{R}^n$ — область в $\mathbb{R}^n$, гомеоморфная замкнутому n-мерному шару. Пусть p_0 — внутренняя точка области B^n, а $T \subset \Omega$ — тор $\mathbb{T}^n \times \{p_0\}$. Всегда ли T и AT пересекаются не менее чем в 2^n точках (с учетом кратностей)?

1965-3. Пусть $A\colon \Omega \to \Omega$ — глобально канонический диффеоморфизм $2n$-мерного торического кольца $\Omega = B^n \times \mathbb{T}^n$, где $B^n \subset \mathbb{R}^n$ — область в $\mathbb{R}^n$, гомеоморфная замкнутому n-мерному шару, а $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ — n-мерный тор. Предположим, что для любого $q \in \mathbb{T}^n$ сферы $S^{n-1}(q) = \partial B^n \times \{q\}$ и $AS^{n-1}(q)$ зацеплены в $\partial B^n \times \mathbb{R}^n$, где $\mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ — универсальное накрытие. Верно ли, что тогда у диффеоморфизма A существует не менее 2^n неподвижных точек (с учетом кратностей) в кольце Ω?

1966

1966-1. Как связаны I-компонента $I(t)$ решения системы

$$d\varphi/dt = \omega(I) + \varepsilon f(I,\varphi), \qquad dI/dt = \varepsilon F(I,\varphi)$$

($\varphi \in \mathbb{T}^k$, $I \in \mathbb{R}^l$, $0 < \varepsilon \ll 1$) и решение $J(t)$ «эволюционного уравнения»

$$dJ/dt = \varepsilon\overline{F}(J), \quad \overline{F}(J) := \frac{1}{(2\pi)^k}\oint_{\mathbb{T}^k} F(J,\varphi)\,d\varphi$$

с одинаковыми начальными условиями на промежутке $0 < t < 1/\varepsilon$?

1966-2. Как ведут себя орбиты из дополнения к объединению инвариантных торов гамильтоновой системы, близкой к интегрируемой? В частности, верно ли, что для этих орбит нет эволюции в s-м приближении, т. е. $|I(t) - J(t)| \ll 1$ при $0 < t < 1/\varepsilon^s$ (здесь I — переменные «действие», $J(t)$ — решение «эволюционного уравнения s-го порядка» с начальным условием $J(0) = I(0)$, а $0 < \varepsilon \ll 1$ — параметр возмущения)?

1966-3. Доказать или опровергнуть следующую гипотезу. Рассмотрим гамильтонову систему с $k \geqslant 3$ степенями свободы, близкую к интегрируемой, с гамильтонианом $H_0(I)+\varepsilon H_1(I,\varphi)$, где (I,φ) — переменные «действие–угол». Тогда в «общем случае» для любой пары окрестностей торов $I = I'$, $I = I''$ с $H_0(I') = H_0(I'')$ найдется при достаточно малом ε орбита, пересекающая обе окрестности.

1966-4. Пусть $A\colon q \mapsto q + f(q)$ — диффеоморфизм тора $\mathbb{T}^2 = \{(q_1, q_2) \operatorname{modd} 2\pi\}$, сохраняющий меру $dq_1 \wedge dq_2$ и центр тяжести ($\oint f(q)\, dq_1 dq_2 = 0$). Доказать, что тогда A имеет по крайней мере 4 неподвижные точки, если считать с кратностями, и по крайней мере 3 геометрически различные неподвижные точки.

1966-5. Пусть $\Omega = \mathbb{T}^k \times B^k$ ($\mathbb{T}^k = \{q \operatorname{modd} 2\pi\}$, $B^k = \{p \in \mathbb{R}^k, |p| \leqslant 1\}$) — торическое кольцо с канонической структурой $\omega^1 = p\,dq$ и $A\colon \Omega \to \Omega$ — канонический диффеоморфизм, гомотопный тождественному и такой, что каждая сфера $\{q\} \times \partial B^k$ зацеплена со своим образом на накрывающей края $\mathbb{T}^k \times \partial B^k$. Тогда A имеет по крайней мере 2^k неподвижных точек, если считать с кратностями, в том числе $k+1$ геометрически различных.

1966-6. Выяснить эргодические свойства движений в дополнении к объединению инвариантных торов гамильтоновой системы, близкой к интегрируемой. В частности, положительна ли энтропия такой системы?

1968

1968-1. Какие наборы чисел B_0, B_1, B_2, $\ldots$ могут служить наборами чисел Морса $B_0 = M_0$, $B_1 = M_1 - M_0$, $B_2 = M_2 - M_1 + M_0$, $\ldots$ для многочлена степени d от n переменных?

1968-2. Какие топологические характеристики вещественного (комплексного) многочлена вычислимы по диаграмме Ньютона (и знакам коэффициентов)?

1969

1969-1. Дано вложение тора в $\mathbb{R}^3$. Может ли оно иметь нетривиальные (хотя бы инфинитезимальные?) изометрические деформации? *Вопрос связан с малыми знаменателями из-за динамической системы, определяемой асимптотическими линиями на параболической кривой. Эта система сама заслуживает изучения.*

1969-2. Дана функция на плоскости (росток в 0). Можно ли реализовать гладко эквивалентную ей функцию в виде гауссовой кривизны (ростка) поверхности $z = f(x, y)$ в $\mathbb{R}^3$? *Может быть, просто саму данную функцию на плоскости* (x, y) *уже можно реализовать? Ответ может зависеть от особенности в нуле: например, может быть, нужна конечнократность,* $\mu < \infty$.

1970

1970-1. Построить версальные деформации эндоморфизмов (векторных пространств и групп).

1970-2. Тривиальна ли алгебраически задача различения центра и фокуса? Общая задача о топологической классификации положений равновесия системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = v(x)$ в $\mathbb{R}^n$?

1970-3. Исследовать связь чисел вращения гамильтоновой системы и однозначности гамильтониана.

1970-4. Перенести теорему Пуанкаре о кольце (и ее гипотетические обобщения) на случай многозначных гамильтонианов.

1970-5. Исследовать диофантовы приближения на подмногообразиях общего положения (и бифуркации в k-параметрических семействах).

1970-6. Исследовать уравнения в вариациях вдоль стационарного решения гидродинамического уравнения Эйлера (например, существование сопряженных точек), в частности, для течения Колмогорова и для течения с функцией тока $\sin y$ на торе.

1970-7. Сосчитать кривизны групп $\mathrm{SDiff}\, S^2$ и $\mathrm{SDiff}\, \mathbb{T}^3$.

1970-8. Исследовать рождение дискретного спектра в точке максимума скорости с точки зрения общности положения — невырожденный случай, бифуркации и т. д. [в частности, для потоков с функцией тока $f(y)$ на торе у критических точек функции $v = f'$].

1970-9. Исследовать индексы инерции стационарных точек кинетической энергии на орбите коприсоединенного представления (с точки зрения бифуркаций и общего положения!).

1970-10. Доказать, что векторное поле дивергенции 0 на S^2 имеет не менее двух особых точек. Доказать аналогичное утверждение для сохраняющих ориентированную площадь отображений $S^2 \to S^2$ (предварительно проверив, что индекс неподвижной точки отображения плоскости, сохраняющего ориентированную площадь, не превосходит единицы).

1970-11. Что можно сказать о $\pi_2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus V)$, где V — гиперповерхность степени m (общего положения)?

1970-12. Вычислить фундаментальные группы и гомологии пространств кривых с простейшими особенностями, полностью распадающихся на прямые, в $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ (поверхностей, распадающихся на плоскости, в $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$, и т. д.).

1970-13. Вычислить топологические инварианты многообразия неособых кубических кривых в $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$.

1970-14. Вычислить фундаментальную группу пространства вложений окружности в полнотории (ответ — инвариант узла!).

1970-15. Исследовать топологические свойства стратификации пространства мероморфных функций на римановой поверхности (рациональных — на S^2).

1970-16. Тривиальна ли задача об устойчивости положения равновесия системы $\dot{x} = v(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, по Ляпунову? Об асимптотической устойчивости? О существовании аналитической функции Ляпунова для этой системы?

1971

1971-1. Рассмотрим росток диффеоморфизма $A\colon (\mathbb{R}^n, 0) \hookleftarrow$ или $A\colon (\mathbb{C}^n, 0) \hookleftarrow$. Пусть $A = B^k$; следует ли из этого, что A коммутирует с некоторым диффеоморфизмом C, $C^k = \mathrm{id}$? Это так для формальных рядов. Верно ли это для диффеоморфизмов окружности?

1971-2. Бифуркации инвариантных многообразий в окрестности особых точек: см. гипотезу на с. 3 статьи: Арнольд В. И. Замечания об особенностях конечной коразмерности в комплексных динамических системах. *Функц. анализ и его прилож.*, 1969, **3**(1), 1–6 [*перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 129–137].

1971-3. Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости положений равновесия и проблемы топологической классификации динамических систем вблизи неподвижной точки, см. статьи: Арнольд В. И. О локальных задачах анализа. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1970, №2, 52–56; Арнольд В. И. Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости и проблемы топологической классификации особых точек аналитических систем дифференциальных уравнений. *Успехи матем. наук*, 1970, **25**(2), 265–266; Арнольд В. И. Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости по Ляпунову и проблемы топологической классификации особых точек аналитической системы дифференциальных уравнений. *Функц. анализ и его прилож.*, 1970, **4**(3), 1–9.

1971-4. Доказать неустойчивость положения равновесия 0 аналитической системы $\ddot{x} = -\partial U/\partial x$, когда изолированная (в $\mathbb{C}^n$?) критическая точка 0 потенциала U — не минимум.

1971-5. Гладкое отображение $A\colon M \to M$ называется *грубым*, если всякое близкое ему (с производными) отображение B топологически эквивалентно A (так что $B = CAC^{-1}$). Плотны ли грубые отображения в пространстве гладких отображений $\mathbb{S}^1 \hookleftarrow$?

1971-6. Существуют ли особые точки векторного поля конечной коразмерности, не допускающие топологически версальной деформации с числом параметров, равным коразмерности (или вообще с конечным числом параметров)? Гипотетический пример в коразмерности 3 — две пары чисто мнимых корней с отношением 3 (диссертация Р. Дж. Сакера).

1971-7. Верно ли, что множество ростков векторных полей в особой точке, топологический тип которых не определяется никакой струей конечного порядка, имеет коразмерность бесконечность? Тот же вопрос для устойчивости по Ляпунову и для асимптотической устойчивости.

1971-8. Изучить патологию разбиения пространства струй конечного порядка векторных полей в особой точке на классы топологической эквивалентности. *Гипотетически при достаточно большой размерности и коразмерности:*

1) *множество классов бесконечно и даже континуально*;

2) *существует многообразие в пространстве струй, такое, что струя из него определяет топологический тип своих ростков, но этот тип меняется вдоль многообразия так, что для любой точки многообразия в ее окрестности на многообразии есть точки другого топологического типа.*

Аналогичные вопросы — для разбиения на устойчивые и неустойчивые по Ляпунову (вариант — асимптотически) струи. Вопрос о бесконечности числа компонент связности множеств устойчивости и неустойчивости в пространстве струй.

1971-9. Перенести проблему Гильберта о предельных циклах на случай дискретного времени.

1971-10. Исследовать систему эволюции биоценоза без хищников $\dot{x}_i = x_i\big(A_i\big[\exp\big(\sum_k[-\lambda_{ik}x_k]\big) - 1\big]\big)$.

1971-11. Оценить (сверху и снизу?) хаусдорфову размерность аттракторов Навье–Стокса через число Рейнольдса.

1972

1972-1. Исследовать топологию дополнения к каустике $\Sigma^2_\pm$ в $\mathbb{C}^3$: верно ли, что это дополнение — пространство $K(\pi,1)$?

1972-2. Исследовать группу монодромии особенности $x^3 + y^3 + z^3$ (и топологию дополнения к бифуркационной диаграмме).

1972-3. Верно ли, что $\min\limits_{y} F(x, y)$ топологически эквивалентен гладкой функции: а) для F общего положения, б) всегда?

1972-4. Исследовать локальную выпуклость границы устойчивости (в семействах матриц или многочленов).

1972-5. Доказать равномерную оценку осциллирующего интеграла: как вычислить равномерный для окрестности показатель в терминах фазы в вырожденной точке?

1972-6. Верно ли, что все особенности со знакоопределенной формой пересечений — это A, D, E?

1972-7. Верна ли следующая гипотеза о трансверсальности стратификации пространства квадратичных форм: многообразие квадратичных форм в гильбертовом пространстве, соответствующих колебаниям мембран, трансверсально стратифицированному многообразию квадратичных форм с кратными собственными числами?

1972-8. Найти «наиболее вероятные» представления групп симметрий.

1972-9. Исследовать погрешность метода усреднения в двухчастотном случае, когда в среднем отношение частот меняется с ненулевой скоростью в усредненном движении (хотя мгновенная скорость его изменения при некоторых быстрых фазах меняет знак).

1972-10. Исследовать погрешность метода усреднения в многочастотных системах общего положения в предположении прохождения резонанса.

1972-11. Вычислить когомологии групп кос серий D и E.

1972-12. Расклассифицировать особенности выпуклых оболочек типичных подмногообразий векторного пространства.

1972-13. Найти число модулей для особенностей Брискорна $\sum_i x_i^{a_i}$.

1972-14. Всегда ли дополнение к бифуркационной диаграмме — пространство $K(\pi, 1)$?

1972-15. Доказать, что простые орбиты совпадают с орбитами, которые примыкают лишь к орбитам меньшей коразмерности (а не к объединениям орбит большей коразмерности).

1972-16. Найти все самосогласованные гравитационные потенциалы на прямой (стационарные точки уравнения Власова Пуассона, может быть, обобщенные).

1972-17. Доказать, что всякий диффеоморфизм двумерного тора, сохраняющий площади и оставляющий на месте центр тяжести, имеет по меньшей мере четыре неподвижные точки (считая с кратностями), причем из них по меньшей мере три геометрически различны.

1972-18. Доказать, что всякий сохраняющий площади и ориентацию диффеоморфизм двумерной сферы на себя имеет по меньшей мере две геометрически различные неподвижные точки.

1972-19. Плотны ли структурно устойчивые отображения окружности в себя?

1972-20. Выпрямление диффеоморфизмов окружности (гладкой заменой переменной) для почти всех чисел вращения (*решено М. Р. Эрманом*) и топологическое препятствие к аналитическому выпрямлению: существование сколь угодно близких к вещественной окружности периодических орбит (*может быть, даже в окрестности любой точки окружности?*). Аналогичное препятствие к расширению кольца приводимости к повороту голоморфной заменой или круга приводимости в задаче Зигеля.

1972-21. Теория Флоке над тором.

1972-22. Достаточно кривое подмногообразие диофантово экстремально (с вероятностью 1 показатель диофантовости такой же, как в объемлющем пространстве).

1972-23. (Р. Том) Градиентное поле имеет входящую в особую точку с касательной траекторию.

1972-24. Исследовать связи инвариантов особенности кривой с локальной фундаментальной группой ее дополнения.

1972-25. Действие монодромии M на гомологии слоя Милнора. Рассыпать особенность, включив ее в семейство $f(z) - pz$, где $p \in \mathbb{C}^n$ — параметр. Изучить бифуркационное многообразие $\Sigma = \{p, \varepsilon : \varepsilon$ — критическое значение функции $f(z) - pz$ от $z\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. [Оно задается уравнением $\varepsilon = H(p)$, где H — преобразование Лежандра f.] Рассмотреть $\pi_1(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \Sigma)$ (ростки в 0). Гипотетически свойства M (нильпотентность и т. п.) отражают свойства π_1. Например, если путь $\varepsilon_0 e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi N$, коммутирует со всеми образующими π_1, то верно ли, что исчезающие циклы он не передвигает (так что $M^N = 1$)?

1972-26. Какие ограничения на топологию многообразия накладывает свойство быть вещественной алгебраической гиперповерхностью степени n в $\mathbb{R}^m$ (в $\mathbb{R}\mathrm{P}^m$)?

1972-27. Представляется ли алгебраическая функция $z^7 + az^3 + bz^2 + cz + 1 = 0$, $z(a, b, c)$, в виде одной из компонент суперпозиции алгебраических функций двух переменных? Найти условия непредставимости компонентой суперпозиции в терминах фундаментальной группы, примыкания стратов, монодромии и других топологических инвариантов, которые у непредставимых функций, предположительно, сложнее. *В этой задаче алгебраические функции можно заменить топологически (или комбинаторно) им эквивалентными «псевдоалгебраическими» — гипотетически непредставимость сохраняется даже при помощи суперпозиций таких псевдоалгебраических отображений.*

1972-28. Вычислить трехмерный характеристический класс слоения $P(x,y)=C$ либо $P\,dx+Q\,dy=0$ (P, Q — многочлены) в $\mathbb{C}\mathrm{P}^2\setminus$ (особые точки).

Последующие три задачи связаны с этим классом.

1972-29. Выяснить, не окажется ли этот цикл целочисленным (например, в $\mathbb{R}$-случае).

1972-30. Указать условия на деформации коэффициентов или кобордизмы, сохраняющие этот коцикл.

1972-31. Попытаться связать этот класс с предельными циклами (неодносвязными слоями).

1972-32. Являются ли классы Бордмана Σ^I *топологически* инвариантными?

1972-33. Доказать, что гомологичный единице симплектический диффеоморфизм компактного симплектического многообразия M на себя имеет по меньшей мере столько неподвижных точек, сколько критических точек имеет гладкая функция на M.

1973

1973-1. Описать типичные особенности в задачах о дифференциальных играх.

1973-2. Найти типичные особенности выпуклых оболочек.

1973-3. (С. Смейл – Ж. Дебрё) Применить теорию особенностей к экономическим моделям.

1973-4. Доказать алгоритмическую неразрешимость проблем устойчивости и задач о предельных циклах.

1973-5. Исследовать нормальные формы неявных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных, и их бифуркации.

1973-6. Исследовать трехпараметрические бифуркации топологического типа динамики вблизи особой точки (ноль плюс мнимая пара и т. д.).

1973-7. Проблема гладкости страта $\mu = \mathrm{const}$.

1973-8. Проблема полунепрерывности числа модулей (модальности).

1973-9. Исследовать нижние деформации критических точек функций (обобщение теории алгебраических гиперповерхностей!) — строение дискриминантов, фундаментальные группы, исчезающие циклы и т. д.

1973-10. Доказать формулу «$(2, 2)$» для числа модулей Г-невырожденной функции двух переменных и получить аналогичные «стереометрические» формулы для других инвариантов (μ и т. п.).

1973-11. Обобщить классификацию допустимых типов квазиоднородности невырожденно-квазиоднородных критических точек (известную лишь для двух и трех переменных): вопрос связан с теорией многочленов деления круга.

1973-12. Верно ли, что дополнение к дискриминанту конечнократной особенности функции есть $K(\pi, 1)$?

1973-13. Исследовать топологические инварианты бифуркационных диаграмм функций (хотя бы в пределах таблиц, чтобы найти общие гипотезы!) в $\mathbb{R}$- и $\mathbb{C}$-случае.

1973-14. Какие ограничения на сосуществование особенностей (на одном слое — на разных слоях …) накладывает участие в версальной деформации данной конечнократной особенности (задача связана с 16-й проблемой Гильберта).

Из этой задачи «выросли» полунепрерывность спектра особенности, оценки числа морсовских точек на гиперповерхности и т. д.

1973-15. Построить теорию кобордизмов критических точек функций.

1973-16. Перенести достижения теории критических точек функций на комплексные гладкие отображения в пространства большей размерности.

1973-17. Описать полностью стратификацию пространства функций двух переменных.

1973-18. Имеется ли связь между коэффициентами Минакшисундарана–Плейеля и коэффициентами многочлена, выражающего объем ε-окрестности (например, для изометрического вложения в $\mathbb{R}^N$)?

1973-19. У всякой ли функции есть морсификации с любым числом критических значений, от 1 до μ? Сколько разных критических значений необходимо в $\mathbb{R}$-случае?

1973-20. Найти группу преобразований, сохраняющих отношение форм $\int u^2\,dx$ и $\int u'^2\,dx$ в пространстве функций u.

1973-21. Построить диаграммы Дынкина простых особенностей как колчаны каких-либо подпространств локальных колец (извлечь колчаны из структуры идеалов?). *А. Н. Шошитайшвили предложил конструкцию, решающую эту задачу для всех случаев, кроме E_7, следовательно, неудовлетворительную.*

1973-22. Отображение $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ xy \end{pmatrix}\begin{matrix} =u \\ =v \end{matrix}$ имеет прямую вырождения якобиана $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{pmatrix}(x = 0)$ и непокрытую кривую $u = 0$ (с одной покрытой точкой 0). Аналогичным свойством обладает отображение Ляшко–Лойенги для (унимодальных) параболических особенностей. Какова общая формулировка соответствующего закона сохранения: чем больше вырождений в прообразе, тем больше непокрытого в образе (или: чем меньше покрыто в образе, тем больше особенностей в прообразе)?

1973-23. Топологическая инвариантность асимптотического инварианта Хопфа векторного поля дивергенции 0 на $\mathbb{S}^3$.

1973-24. Исследовать связи теории асимптотического инварианта Хопфа с кручением Рейдемейстера (*Рея–Зингера*).

1973-25. Гипотеза А. Д. Сахарова: если есть зацепленные или заузленные траектории, то вмороженное поле не может релаксировать (до сколь угодно малой энергии) при помощи SDiff B^3.

1973-26. Парадокс релаксации: невероятно, чтобы неинтегрируемые вначале поля релаксировали к собственным полям для rot. Что же с ними происходит? Возникают особенности у предельного поля? Или предельного поля вообще нет?

1973-27. Рассмотрим отображение $\mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$, сопоставляющее точке базы версальной деформации многочлен, корнями которого являются критические значения. В случае особенности A_k кратность этого разветвленного накрытия, $(k+1)^{k-1}$, равна числу деревьев с $k+1$ упорядоченной вершиной. Истолковать аналогичным образом кратность этого отображения для других простых особенностей (равную, согласно О. В. Ляшко, $k!\,h^k/|W|$, где h — число Кокстера, а $|W|$ — порядок группы Вейля).

1973-28. В $\mathbb{R}^n$ случайно набросаны точки с плотностью ρ, $V(d)$ — их d-окрестность. Рассмотрим удельные числа Бетти

$$\lim_{R\to\infty} \frac{b_i(V(d) \cap (\text{шар радиуса } R))}{R^n} = \beta_i(d, \rho).$$

Исследовать эти функции.

1974

1974-1. Восстановление квазиоднородной алгебры Ли по системе корней. Рассмотрим набор положительных показателей квазиоднородности (весов) w_i координат x_i в $\mathbb{C}^n$ $(i = 1, \ldots, n)$. *Образующей* квазиоднородной алгебры Ли называется одночлен $x^m \partial/\partial x_i$ веса ноль $\big($где $m \in \mathbb{Z}^n$, $m_j \geqslant 0$, $\sum w_j m_j = w_i\big)$. *Корнем* этой образующей называется вектор $\widetilde{m} = m - 1_i \in \mathbb{Z}^{n-1} = \big\{\widetilde{m} : \sum w_j \widetilde{m}_j = 0\big\}$. Восстанавливается ли алгебра Ли, порожденная всеми этими образующими (с точностью до изоморфизма алгебр Ли), по своей системе корней, рассматриваемой с точностью до линейных преобразований гиперплоскости $\mathbb{R}^{n-1}$, не сохраняющих, вообще говоря, координатные гиперплоскости $m_i = 0$ в ней?

Система весов по системе корней не восстанавливается. Но алгебра почти восстанавливается (с точностью до знаков некоторых структурных констант). Во всех разобранных примерах разные выборы этих знаков приводят к изоморфным алгебрам. Но неясно, всегда ли это так.

1974-2. В теории двойственности выпуклых многогранников появляется лагранжево или лежандрово многообразие с особенностями. Точно так же в теории оптимального управления встречаются обобщения гамильтоновых систем с негладкими гамильтонианами (у которых через одну точку может проходить целое многообразие фазовых кривых, как в случае гамильтониана $H = |p_1| + |p_2|$). Тем не менее их «потоки» в каком-то смысле удовлетворяют теореме Лиувилля и должны рассматриваться как обобщенные симплектоморфизмы (являющиеся, вероятно, не отображениями, а всего лишь лагранжевыми подмногообразиями с особенностями в пространстве-произведении).

Построить теорию лагранжевых многообразий с особенностями и обобщенных симплектоморфизмов, обслуживающих подобные ситуации (и даже получить для них оценки снизу числа точек пересечения точных лагранжевых многообразий и числа неподвижных точек точных симплектоморфизмов, обобщающие «геометрическую теорему» Пуанкаре).

1974-3. Найти все особые значения модулей параболических особенностей (при которых меняется топологический или комбинаторный тип проекции многообразия особенностей дискриминанта на бифуркационную диаграмму функций, т. е. множество реализующихся малыми деформациями функции типов распадения критической точки на несколько наборов более простых критических точек на (вообще говоря) нескольких критических уровнях). Чем замечательны соответствующие этим особым значениям модулей эллиптические кривые?

1974-4. Найти классификационную задачу теории лагранжевых (лежандровых?) особенностей, ответ в которой находится в естественной биекции со списком групп отражений Кокстера.

1974-5. Найти применения комплексных групп отражений (Шеппарда–Тодда) в теории особенностей.

1974-6. Симплектизировать топологию: теория индекса Пуанкаре особых точек превращается, по-видимому, в теорию неподвижных точек симплектоморфизмов и обобщение последней геометрической теоремы Пуанкаре (стало быть — в обобщение теории Морса). Нет ли симплектификации и у других топологических теорий? *Подобно тому, как комплексификацией* $\mathbb{Z}_2$ *является* $\mathbb{Z}$, *симплектификация может настолько же сильно отличаться от исходного объекта, насколько группа Кокстера* C_k *отличается от* A_k.

1974-7. Расклассифицировать простые особенности функций на многообразии с действием группы (например, конечной) с точностью до симметричных диффеоморфизмов (коммутирующих с действием группы).

1974-8. Исследовать типичные перестройки движущегося с течением времени волнового фронта (и соответствующего ему лежандрова отображения).

1974-9. Дать топологическую классификацию лежандровых особенностей, соответствующих параболическим критическим точкам функций.

1974-10. Коническая особенность над данным основанием переносит в особую точку топологические инварианты основания. Для не конических особенностей (например, квазиоднородных?) тоже можно попытаться найти в локальной алгебре особенности следы дискретных инвариантов основания (например, ранг и сигнатуру слоя Милнора?).

Какие алгебраические объекты получаются на этом пути? Что происходит с характеристическими классами и числами?

1975

1975-1. Любой интересный дискретный инвариант общей особенности с многогранником Ньютона Г является интересной функцией многогранника. Изучить: сигнатуру, число модулей, показатель особости, целочисленную монодромию, вариацию, многочлен Бернштейна, μ_i (общих сечений).

1975-2. Восстанавливается ли многогранник Г Г-невырожденной функции из $\mathfrak{m}^3$ по ней? Восстанавливаются ли показатели в квазиоднородном случае? Главная часть (главные части на гранях)?

1975-3. Пусть функция f квазиоднородна, но вырождена. Можно ли квазиоднородной заменой уменьшить ее многогранник Ньютона? Это частный вопрос из: всякая ли функция с $\mu < \infty$ стабильно эквивалентна Г-невырожденной.

1975-4. Пусть функция f Г-невырождена. Верно ли, что существует правильный верхний базис $\{e_k\}$ такой, что $f \sim f_0 + \sum c_k e_k$? Существует ли правильный верхний базис, обслуживающий все суммы f_0 с верхними слагаемыми (тогда ответ на первый вопрос положителен)?

1975-5. Пусть $(\alpha_1, 1)$ и $(\alpha_2, 1)$ — два типа квазиоднородности с аффинно эквивалентными шаблонами [множествами целых точек $m \geqslant 0$ гиперплоскости $\{m : (m, \alpha) = 1\}$]. Верно ли, что верхние шаблоны

$[\{m > 0 : (m, \alpha) = 1 + \beta\}]$ попарно эквивалентны (с немонотонным пересчетом $\beta_1 \mapsto \beta_2$), и что эта эквивалентность переводит верхний базис первой особенности в верхний базис второй?

1975-6. Страт $\mu = \mathrm{const}$ квазиоднородной функции в стандартной версальной деформации линеен и порожден нестрого верхними мономами. Так ли это для Г-невырожденной функции? (В общем случае – гладок ли страт $\mu = \mathrm{const}$?)

1975-7. Могут ли быть топологически эквивалентными особенности разных стратов $\mu = \mathrm{const}$?

1975-8. Полунепрерывен ли показатель особости?

1975-9. Является ли число $s(\mu)$ стратов $\mu = \mathrm{const}$ с $\mu = 32$ степенью 2? Для $\mu = 1$, 2, 4, 8, 16 имеем $s(\mu) = 1$, 1, 2, 4, 32 соответственно. Есть ли смысл в последовательности $s(\mu) =$ **1**, **1**, 1, **2**, 2, 3, 3, **4**, 4, 7, 11, 15, 14, 17, 22, **32** [жирным выделены значения $s(\mu)$, отвечающие $\mu = 1$, 2, 4, 8, 16]?

1975-10. Конечно ли множество не эквивалентных квазиоднородных шаблонов с данным числом переменных n? Эквивалентность = = комбинаторный (или аффинный?) тип выпуклой оболочки шаблона = $= \{\mathbb{Z}^n \ni m \geqslant 0 : (m, \alpha) = 1\}$.

1975-11. Является ли дополнение к бифуркационной диаграмме функции в комплексном случае пространством $K(\pi, 1)$? В вещественном случае — стягиваемы ли компоненты? *Гипотетически — нет, хотя Р. Том думал, что да*!

1975-12. У всякой ли вещественной функции есть вещественная морсификация (с μ вещественными критическими точками)?

1975-13. Какое наименьшее число критических значений образуется при распаде μ-кратной критической точки на μ простых? Гипотетически $n + 1$, где n — число переменных (или коранг).

1975-14. Является ли коранг топологическим инвариантом?

1975-15. Какие особенности могут съесть A_1? Выплюнуть A_1? Почему всякий страт $\mu = \text{const}$ соединен со стратом A_1 цепочкой стратов всех коразмерностей?

1975-16. Пусть $f \oplus g \sim f \oplus h$ (f, g, h — изолированные особенности). Верно ли, что $g \sim h$?

1975-17. Дать «объективное» определение серий особенностей.

1975-18. Перечислить распадения простых особенностей.

1975-19. Вычислить стабильное кольцо когомологий дополнения к бифуркационным диаграммам: а) функций n переменных, б) стабильное по $n \to \infty$.

1975-20. Составить список простых особенностей отображений m-мерных многообразий в n-мерные.

Как сказывается A–D–E классификация на этом списке?

1975-21. Выразить через диаграмму Ньютона основные численные инварианты типичной особенности с данной диаграммой (сигнатуру, род одномерного слоя Милнора и т. п.).

1975-22. Проблема стабилизации инвариантов: исследовать поведение основных инвариантов особенности при добавлении квадратов новых переменных.

1975-23. Сравнить стратификации вещественных и комплексных особенностей функций. Выделить среди вещественных форм M-особенности. Сравнить вещественную и комплексную модальности. Является ли комплексная стратификация комплексификацией вещественной?

1975-24. Исследовать страт $\mu = \text{const}$ (определяемый условием постоянства коразмерности орбиты). Является ли он гладким (для действий алгебраических групп, для естественных задач теории особенностей — например, для классификации особенностей каустик и волновых фронтов)?

Верно ли, что каждый такой страт становится неприводимым в базе комплексной версальной деформации подходящей более «глубокой» особенности?

Стабилизируется ли кольцо когомологий дополнения к этому страту в этой «растущей» базе?

1975-25. Исследовать лагранжевы особенности перестраивающихся каустик, рассматриваемых в космологической «теории блинов» Зельдовича (в том числе с учетом тяготения, с учетом слияния частиц и для непотенциальных течений).

1975-26. Вычислить нормальные формы версальных деформаций матриц различных типов (симметрических, унитарных и т. п.) и исследовать соответствующие бифуркационные диаграммы и кольца когомологий.

1975-27. Исследовать асимптотики осциллирующих интегралов (в том числе дать равномерные оценки вблизи особенностей каустик и вычислить наивысшие индивидуальные показатели особости, встречающиеся неустранимо в типичных семействах с данным числом параметров).

Перенести эти оценки на интегралы метода перевала.

1975-28. Исследовать особенности огибающих типичных семейств подмногообразий с точки зрения симплектической и контактной теории лагранжевых и лежандровых отображений.

1975-29. Исследовать особенности решений вариационных задач общего положения (а также вариационных задач, встречающихся в типичных конечнопараметрических семействах с фиксированным и с не фиксированным заранее числом параметров).

1975-30. Исследовать особенности неявных дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными).

1976

1976-1. Дана система многогранников Ньютона. Существуют ли *вещественные* многочлены с такими многогранниками и с правильным (таким же, как для общих комплексных коэффициентов) числом вещественных корней?

1976-2. Пусть даны два полиномиальных векторных поля на плоскости степеней m и n. Можно ли оценить сверху число точек пересечения их предельных циклов через m и n (найти точную, достижимую оценку)?

1976-3. Исследовать сходимость нормальных форм уравнений $y'' = f(x, y, y')$.

1976-4. Построить теорию формы «кривизны-недезарговости» (измеряющей локальную неэквивалентность линейному уравнению) для $y'' = f(x, y, y')$.

1976-5. Построить симплектическую (или контактную) версию асимптотического инварианта Хопфа: $H : M^{2n} \to \mathbb{R}$, ω — симплектическая структура, $\omega|_{H=h} = d\alpha$, $\beta = \alpha \wedge \omega^{\wedge(n-1)} \in \Omega^{2n-1}$, $\int_{H=h} \beta = \text{const}$ — симплектический аналог инварианта Хопфа. Для данного гамильтонова поля научиться измерять среднюю скорость вращения лагранжева подпространства касательного пространства, увлекаемого потоком.

1976-6. Построить теорию окрестности $\mathbb{C}P^1$ в комплексных многообразиях (аналогичную уже построенной теории окрестностей эллиптической кривой и предшествующую теории окрестностей кривых бóльших родов).

1976-7. (А. Трессе) Обосновать теоремы конечности в теории дифференциальных инвариантов.

1976-8. Всякая ли конечнократная особенность функции стабильно эквивалентна Г-невырожденной (относительно своей диаграммы Ньютона Г)?

1976-9. Расклассифицировать типичные особенности синтеза в задаче оптимального управления общего положения, заданной типичным полем индикатрис — семейством отображений общего положения фиксированного многообразия во все касательные пространства многообразия-базы (параметр — точка многообразия-базы).

1976-10. Исследовать асимптотику меры уклоняющихся траекторий в задаче о возмущениях общего положения k-частотной условно-периодической общей системы с m медленными переменными.

1976-11. По векторному полю v с особой точкой на плоскости построить комплекс, гомологии которого дают предельные циклы, исчезающие в этой точке.

1976-12. (А. Г. Кушниренко) Из «правила Декарта» следует, что число вещественных корней многочлена ограничено сверху числом его одночленов. Перенести это наблюдение на случай многих переменных: простота формулы влечет ограничения на топологию заданного ею многообразия. *Теория «малочленов» построена К. А. Севастьяновым и А. Г. Хованским, однако полученные оценки в многомерном случае, видимо, далеки от точных.*

1976-13. Является ли гладким страт $\mu = \text{const}$? *Его гладкость вытекала бы из положительного решения следующей задачи.*

Пусть дано алгебраическое действие комплексной алгебраической группы в конечномерном аффинном пространстве (например, линейное представление). Рассмотрим множество точек, стационарные группы которых имеют данную размерность. Является ли это множество гладким многообразием?

1976-14. Совпадает ли вещественная модальность вещественной функции с комплексной?

1976-15. Для каких весов $\alpha_s = A_s/N$ существует невырожденная квазиоднородная функция степени 1?

1976-16. Вычислить модальность Г-невырожденной функции по многограннику Ньютона Г. В частности, для полуквазиоднородных функций доказать, что модальность равна числу мономов базиса локального кольца на диаграмме и выше.

1976-17. Вычислить сигнатуру квадратичной формы, заданной индексом пересечения в гомологиях средней размерности локального неособого множества уровня Г-невырожденной функции $n \equiv 3 \pmod 4$ переменных.

1976-18. Найти нормальную форму, к которой приводятся все Г-невырожденные функции с данной диаграммой Ньютона Г.

1976-19. Найти жорданову нормальную форму оператора монодромии Г-невырожденных функций с данной диаграммой Ньютона Г.

1976-20. Каково наибольшее число компонент локальных вещественных множеств уровня морсовизации вещественной функции с данной (скажем, Г-невырожденной) особенностью?

1976-21. Многочлены Чебышева от многих переменных. С каждой конечнократной критической точкой функции связан свой «многочлен Чебышева» — морсовизация с минимально возможным числом критических значений (обычные многочлены Чебышева получаются из функций одной переменной вида z^n). Какие из замечательных свойств многочленов Чебышева от одной переменной переносятся на определенные таким образом многочлены от нескольких переменных?

1976-22. Равномерные оценки осциллирующих интегралов. *Осциллирующий интеграл* имеет вид

$$I(h,\lambda)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{iF(x,\lambda)/h}\varphi(x)\,dx,\quad h\to 0, \tag{1}$$

где φ — сосредоточенная в достаточно малой окрестности начала координат гладкая функция; F — вещественная деформация функции $f(x)=F(x,0)$, гладко зависящая от параметра λ; h — малый параметр; $F(0,0)=0$. *Равномерным показателем* β особенности функции f в точке 0 называется точная нижняя грань чисел γ, для которых при любой деформации F

$$|I(h,\lambda)|\leqslant C(\varphi)|h|^{\frac{1}{2}n-\gamma} \tag{2}$$

при всех достаточно малых $|\lambda|$.

Задача состоит в том, чтобы вычислить показатель β (скажем, для Г-невырожденных функций f).

Для каждой пары целых чисел n и l можно определить *универсальный равномерный показатель* $\beta(n,l)$ как точную нижнюю грань чисел γ, для которых осциллирующий интеграл (1) допускает равномерную по параметру λ оценку (2) для всех семейств F функций n переменных x и l параметров λ, исключая тощее множество в функциональном пространстве.

Задача вычисления рациональных чисел $\beta(n,l)$ представляется очень трудной, так как она кажется почти эквивалентной задаче полной классификации всех особенностей.

При фиксированном l и $n\to\infty$ числа $\beta(n,l)$ стабилизируются:

$$\beta(n,l)=\beta(\infty,l)=\beta(l),\ \text{ если } n \text{ велико.}$$

Рациональное число $\beta(l)$ — это наибольший показатель особости из особенностей коразмерности l.

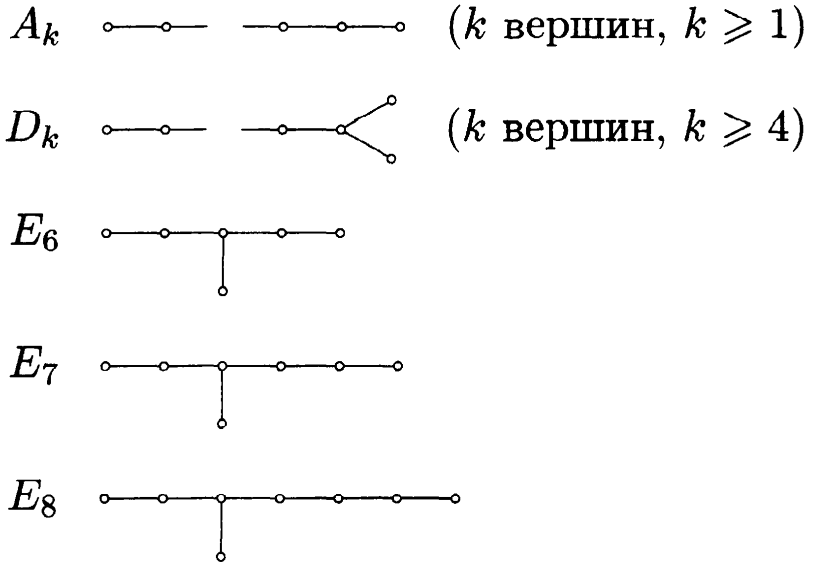
Задача для оптимистов: найти все $\beta(l)$. Задача для пессимистов: найти $\beta(1000)$.

1976-23. Равномерные оценки вариаций прообраза. Пусть g — росток диффеоморфизма $(\mathbb{R}^n,O_1)\to(\mathbb{R}^n,O_2)$ или $(\mathbb{C}^n,O_1)\to(\mathbb{C}^n,O_2)$, и пусть $g(O_1)=O_2$ — μ-кратная точка пространства-образа. В зависимости от типа особенности g в точке O_1 μ прообразов точки O_2 могут сливаться по-разному. Изучить асимптотику тех или иных геометрических характеристик прообраза малого шара радиуса δ с центром в точке O_2 при $\delta \downarrow 0$ и описать тем самым различие между этими способами слияния.

В качестве таких характеристик можно взять т. н. *вариации* всех размерностей.

Вариация $\sigma_k(D)$ достаточно хорошего множества $D \subset \mathbb{R}^n$ — это среднее по всем k-мерным подпространствам пространства $\mathbb{R}^n$ значение k-мерного объема ортогональной проекции множества D на k-мерные подпространства с учетом кратности — числа компонент, проектирующихся в одну точку. *В частности, $\sigma_n(D)$ — объем множества D, а $\sigma_0(D)$ — число его компонент связности.*

1976-24. Проблема A, D, E. Диаграммы Дынкина



неожиданно появляются при решении столь разных классификационных задач, как классификация:

1) критических точек функций,

2) правильных многогранников [или конечных ортогональных групп] в $\mathbb{R}^3$,

3) категорий линейных пространств и отображений,

4) каустик,

5) волновых фронтов,

6) групп, порожденных отражениями [или групп Вейля с корнями равной длины],

7) простых групп Ли,

8) особенностей алгебраических гиперповерхностей со знакоопределенной формой пересечений соседнего гладкого слоя.

Некоторые связи между этими объектами известны, однако в большинстве случаев совпадение ответов в разных задачах не имеет пока никакого объяснения.

Проблема A, D, E: найти такую *общую* классификационную теорему, из которой получались бы решения всех перечисленных задач.

1976-25. Проблема $K(\pi, 1)$. Дополнения к бифуркационным многообразиям функций и к бифуркационным многообразиям для их множеств уровня в случае простых особенностей A, D, E являются пространствами Эйленберга–Маклейна $K(\pi, 1)$. Допускает ли этот результат какое-либо обобщение на случай непростых особенностей?

Более общая формулировка задачи: изучить топологические свойства дополнений к бифуркационным подмножествам дифференцируемых отображений.

1976-26. Дополнить до коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\text{Построение простых особенностей по правильным многогранникам} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Построение квазиоднородных двумерных особенностей из автоморфных форм} \arrow[d] \\
\text{Построение бифуркационных диаграмм простых особенностей} \arrow[r] & ?
\end{tikzcd}$$

1976-27. Дополнить до коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\text{Теория Морса} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Обобщенные группы Уайтхеда} \arrow[d] \\
\text{Теория Пикара–Лефшеца} \arrow[r] & ?
\end{tikzcd}$$

1976-28. Стабильное кольцо когомологий. С критической точкой голоморфной функции f связано кольцо $H^*(f)$ когомологий дополнения к бифуркационной диаграмме множеств уровня в базе версальной деформации.

Пусть f_2 — росток функции из версальной деформации функции f_1. Тогда трансверсаль к соответствующему f_2 страту в базе версальной деформации задает вложение дополнений и гомоморфизм колец когомологий $H^*(f_1) \to H^*(f_2)$. Например, если $f_1 = x^n$, а $f_2 = x^{n-1}$, то H^* — это кольца когомологий групп кос из n и из $n-1$ нити, а гомоморфизм индуцирует стабилизацию колец когомологий групп кос при $n \to \infty$.

Происходит ли подобная стабилизация и в общем случае, и если да, то каково стабильное кольцо когомологий?

Аналогичные вопросы можно поставить и для дополнений к бифуркационным диаграммам функций.

1976-29. Обращение теоремы Лагранжа–Дирихле. Доказать, что положение равновесия 0 системы Ньютона $\ddot{x} = -\operatorname{grad} U$ неустойчиво, если критическая точка 0 многочлена (или произвольной аналитической функции) $U(x_1, \ldots, x_n)$ не есть точка локального минимума.

1976-30. (Р. Том) Пусть $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — многочлен. Доказать, что хотя бы одна из фазовых кривых системы $\dot{x} = \operatorname{grad} U$ входит в критическую точку 0 с определенной касательной.

1976-31. Алгоритмическая неразрешимость проблемы устойчивости. Является ли алгоритмически разрешимой задача об устойчивости положения равновесия 0 системы $\dot{x}_k = P_k(x)$, $k = 1, \ldots, n$, где P_k — многочлены с рациональными коэффициентами?

Близкие задачи, алгоритмическая неразрешимость которых, вероятно, повлекла бы за собой неразрешимость предыдущей:

1) Задача о существовании предельного цикла у системы $\dot{x} = P(x,y)$, $\dot{y} = Q(x,y)$, где P и Q — многочлены с рациональными коэффициентами.

2) Задача о положительности вещественного абелева интеграла $\oint R(x,y)\,dx$ по овалу кривой $P(x,y) = 0$, где P и R — многочлены с рациональными коэффициентами.

1976-32. Типичные особенности решений вариационных задач. Известно, что вариационные задачи приводят к разрывам и особенностям даже в том случае, когда в постановке задачи всё гладко. Возникающие при этом особенности могут быть патологически сложными из-за бесконечнократных вырождений. Можно ли избежать патологий, ограничиваясь случаями общего положения?

Примеры: задача об обходе препятствия, задача о скорейшем пути при ограничении на скорость $\dot{x} \in F_x \subset T_x\mathbb{R}^n\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, задача о достижимых точках. При замене индикатрис F_x их выпуклыми оболочками возникает следующая задача: описать особенности выпуклой оболочки k-мерного подмногообразия общего положения в $\mathbb{R}^n$.

1976-33. Особенности в теории уравнений с частными производными. Описать характер особенностей на поверхностях, кривых и в точках пространства, которые фактически имеются у решений уравнений с гладкими начальными или граничными условиями общего положения и которые ответственны за то, что решение оказывается не бесконечно гладким, но лишь принадлежащим соответствующему функциональному пространству.

1976-34. Суперпозиции алгебраических функций. Рассмотрим алгебраически замкнутое основное поле k и n независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ над k. Обозначим через K алгебраическое замыкание поля $k(x_1, \ldots, x_n)$. Для каждого натурального $r \leqslant n$ можно определить подполе M_r поля K, состоящее из всех элементов K, которые получаются путем последовательных композиций алгебраических функций r переменных. Ясно, что $M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n = K$.

Может ли случиться, что $M_r = K$ для некоторого $r < n$? Более общим образом, сколько среди полей $M_1, M_2, \ldots, M_n$ различных? Сколько различных полей среди M_r^s, где $M_r^s \subset M_r \subset K$ поле не более чем $(s-1)$-кратных последовательных композиций алгебраических функций r переменных, так что

$$M_r^1 = k(x_1, \ldots, x_n), \qquad \bigcup\nolimits_{s=1}^{\infty} M_r^s = M_r.$$

Например, можно поставить задачу определить минимальное M_r или M_r^s, содержащее элемент f, удовлетворяющий соотношению

$$f^n + x_1 f^{n-1} + \cdots + x_{n-1} f + x_n = 0.$$

Аналогичные вопросы имеют смысл и для полей $k(x_1, x_2, \ldots)$ с бесконечным числом переменных x_i.

1976-35. Сколько связных компонент может иметь дополнение алгебраической гиперповерхности степени n в $\mathbb{R}\mathrm{P}^k$? *Это неизвестно уже для* $k = 3$.

1976-36. Найти все возможные конфигурации овалов плоской кривой степени n с максимальным числом овалов, т. е. $1 + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

1976-37. Может ли векторное поле на плоскости, заданное двумя многочленами степени 2, иметь более трех предельных циклов?

1976-38. Определить особенности и другие аналитические свойства термодинамических функций, зная потенциал взаимодействия.

1976-39. Всякий ли симплектический диффеоморфизм двумерного тора, гомологичный тождественному, имеет неподвижную точку?

1976-40. Что является математическим эквивалентом физического понятия «турбулентности»? Один из аспектов этой задачи: найти «хорошие» теоремы существования и единственности для трехмерных уравнений Навье–Стокса.

1976-41. Найти механические (физические, химические и т. д.) явления, описываемые системами с экспоненциальным разбеганием траекторий и с внутренне неустойчивыми притягивающими режимами.

1976-42. Численное качественное или эргодическое исследование многомерных динамических систем (и, в частности, предельных режимов в этих системах) предполагает постановку реалистических вопросов, далеких от обычно рассматриваемых в абстрактных классификационных теоремах. Первоочередные задачи здесь:

1) научить машину узнавать, вошла ли траектория в окрестность притягивающего инвариантного множества;

2) если вошла, то научить машину определять размерность этого множества, а если возможно, то и его топологию;

3) научить машину вычислять эргодические характеристики движения на этом множестве; прежде всего — узнавать, имеет ли место на рассматриваемом множестве экспоненциальная неустойчивость траекторий (положительна ли энтропия).

1977

1977-1. Исследовать взаимоотношение между спектральной последовательностью фильтрации Ньютона и смешанной структурой Г-невырожденной особенности.

1977-2. Извлечь из смешанных структур Ходжа обобщения неравенства Петровского на кривые с особенностями (гиперповерхности, ...).

1977-3. Расклассифицировать унимодальные краевые особенности.

1977-4. Расклассифицировать простые особенности в присутствии особой фиксированной гиперповерхности (или другого алгебраического подмногообразия).

1977-5. Исследовать дискриминант H_3.

1977-6. Дать аксиоматику полного и линеаризованного сворачивания инвариантов.

1977-7. Определить и исследовать индексы особых точек 1-форм на многообразиях с особенностями.

1977-8. Как проявляется в теории особенностей кручение Рейдемейстера и Рея–Зингера?

1977-9. Классифицировать невырожденные квазиоднородные отображения $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ (подобно разбиению пространства отображений $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ на 3 и $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ на 7 типов).

1977-10. Доказать утверждения О. В. Ляшко о многочлене Пуанкаре квазиоднородного отображения $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ с весами A_i в прообразе и весами D_i в образе:

$$p(t) = (-1)^{m-n} t^{\sum D - \sum A} \left[-1 + \operatorname*{res}_{s=0} \prod \frac{1 - st^{A_i}}{s - st^{A_i}} \prod \frac{s - st^{D_i}}{1 - st^{D_i}} \frac{s\,ds}{1 - s} \right] + \\ + \frac{\prod(1 - t^{D_i})}{\prod(1 - t^{A_i})} \left[\sum t^{-D_i} - \sum t^{-A_i} + 1 \right].$$

При $m - n = 1$

$$p(t) = \frac{\prod(1 - t^{D_i})}{\prod(1 - t^{A_i})} \left[\sum t^{-D_i} - \sum t^{-A_i} + 1 \right] + t^{\sum D - \sum A}.$$

При $m - n = 2$

$$p(t) = \frac{\prod(1 - t^{D_i})}{\prod(1 - t^{A_i})} \left[\sum t^{-D_i} - \sum t^{-A_i} + 1 + t^{\sum D_i - \sum A_i} \right] - t^{\sum D - \sum A}.$$

При $m - n = 1$ $p(t) = t^{\sum D - \sum A} h(t)$, где h — многочлен Пуанкаре фильтрации Хамма–Груэла:

$$h(t) = (-1)^{m-n} \left[-1 + \operatorname*{res}_{s=0} \prod \frac{st^{A_i} + 1}{t^{A_i} - 1} \prod \frac{st^{D_i} - s}{st^{D_i} + 1} \frac{ds}{s(s+1)} \right],$$

$$\Omega_{\mathrm{rel}} = \Omega^{m-n} / d\Omega^{m-n-1} + df \wedge \Omega^{m-n\quad 1}$$

(здесь косая черта означает «по модулю»).

При $m - n = 2$ это не так: $D_1 = D_2 = 2$, $A_1 = \dots = A_4 = 1$, $h(t) = 3t^4 + 4t^3$, $p(t) = 2t^{-2} + 4t^{-1} + 1$. При $m - n = 2$ $h(1) = \mu(1)$. Так ли это при $m - n > 2$ — неизвестно.

1977-11. Исследовать отображение, сопоставляющее множеству (неупорядоченному) критических точек (функции из версальной деформации) множество (неупорядоченное) критических значений, а также соответствующие отображения (упорядоченные наборы критических точек) $\rightsquigarrow$ (неупорядоченные наборы критических значений): найти дискриминанты, фундаментальные группы и другие инварианты разветвленных накрытий: как переставляются критические точки при обходах каустики?

1977-12. Исследовать бифуркации (с параметрами $\operatorname{Re}\varepsilon$, $\operatorname{Im}\varepsilon$) семейства векторных полей на плоскости $\dot{z} = \varepsilon z + Az|z|^2 + \bar{z}^3$ при общих значениях параметра A (гипотетически это — топологически версальные деформации $\mathbb{Z}_4$-симметричных полей для каждой из 48 областей на плоскости A).

1978

1978-1. Исследовать топологические свойства функций $f(x) = \max\limits_{y} F(x, y)$.

1978-2. Исследовать особенности границы многообразия достижимости в типичной управляемой системе.

1978-3. Исследовать особенности показателей крутизны Нехорошева (стратификацию многообразия функций Гамильтона по показателям). Вычислить показатели типичной системы с 1, 2, 3 степенями свободы во всех точках.

1978-4. Если $\{I_\alpha\}$ — первые интегралы гамильтоновой системы, уже образующие замкнутую по скобкам Пуассона систему, так что $(I_\alpha, I_\beta) = \mathcal{F}_{\alpha\beta}(I)$, то можно ли заменить их на J_α так, что $(J_\alpha, J_\beta) = \sum_\gamma C^\gamma_{\alpha\beta} J_\gamma$? (Если нет, то какие деформации начальной алгебры Ли не эквивалентны друг другу?)

1978-5. Формализовать принцип хрупкости хорошего.

1978-6. Ослабленная 16-я проблема Гильберта.

1978-7. Какие резонансы в трехчастотной гамильтоновой системе сильные (в двухчастотной — $|\omega_1| : |\omega_2| = 1 : 1,\ 1 : 2,\ 1 : 3,\ 2 : 3,\ 1 : 4,\ 3 : 4,\ 2 : 5,\ 4 : 5$)?

1978-8. Описать краевые особенности B_μ, C_μ, возникающие в задаче об обходе препятствия.

1978-9. Сколько циклов рождается при общих двупараметрических бифуркациях с прохождением собственных чисел через $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$ (в соответствующей медленной системе, т. е. для векторного поля на плоскости, касательного сторонам угла, при бифуркации с нулевыми собственными числами в двупараметрическом семействе таких полей; или — что то же — для $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-эквивариантных полей на плоскости)?

1978-10. Исследовать стратификацию многообразия линейных элементов поверхностей общего положения вблизи каждого из 10 стратов.

1978-11. (В. Л. Попов) Как связаны с теорией особенностей факторы $\mathbb{C}^2$ по конечным подгруппам $\mathrm{U}(2)$ [не $\mathrm{SU}(2)$, а $\mathrm{U}(2)$!]?

1978-12. Исследовать геометрические (топологические?) свойства p-вещественных подмногообразий в $\mathbb{C}^N$ или в кэлеровом многообразии (с ограничением на размерности пересечений касательной плоскости с умноженной на i касательной плоскостью).

1978-13. Исследовать взаимодействие теории Смита комплексного сопряжения со смешанной структурой Ходжа многообразия.

1978-14. Исследовать подполугруппы Ли — например, в $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ — и их касательные конусы в единице.

1978-15. Сколько предельных циклов может родиться из нуля Г-невырожденного векторного поля с данной диаграммой Ньютона Г? Верно ли, что их меньше $N(\Gamma)$?

1978-16. Исследовать глобально особенности гауссовых отображений.

1978-17. Рассмотреть с точки зрения особенностей теорию симметрических гиперболических систем уравнений с частными производными.

1978-18. Построить явно локальную топологическую классификацию лагранжевых и лежандровых отображений (в случаях, когда гладкая классификация имеет модули и даже функциональные модули). *Гладкая классификация описана В. М. Закалюкиным (и содержит функциональные параметры) до размерности отображаемого лагранжева или лежандрова многообразия* 10 *включительно.*

Но неясно,

а) *определяет ли класс Закалюкина топологический тип лагранжева (лежандрова) отображения? То есть постоянен ли этот тип вдоль класса?*

б) *определяет ли этот класс топологию разбиения окрестности в пространстве струй на более простые классы? То есть будут ли бифуркационные диаграммы локально диффеоморфны или хотя бы гомеоморфны?*

в) *Здесь можно под бифуркационной диаграммой понимать:*

— *A*: *дискриминант (бифуркационную диаграмму нулей)*;

— *B*: *бифуркационную диаграмму функций (в усеченной базе)*;

— *C*: *проекцию A на B*;

— *D*: *разбиение на лагранжевы классы в пространстве струй*;

— *E*: *разбиение на лежандровы классы.*

г) *Те же вопросы остаются для мультиструй.*

д) *Для применимости соображений трансверсальности к этим стратификациям универсальных объектов нужно бы знать, выполнены ли условия Уитни A и B (гипотетически — нет, так что «стратификация» Закалюкина подлежит измельчению!).*

1978-19. Исследовать топологически перестройки D_5 в трехмерном пространстве (*исследовалось В. И. Бахтиным*).

1978-20. Исследовать с точностью до диффеоморфизмов особенности бикаустик D_5.

1978-21. Исследовать с точностью до эквивалентностей (сильных эквивалентностей) заметание бикаустики D_4: даны три гладкие кривые $\varphi_i\colon (\mathbb{R},0) \to (\mathbb{R}^2,0)$, выходящие из 0 с общей скоростью $v \neq 0$, в остальном общие. Эквивалентность — диаграммы

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R},0) \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\tau"] & (\mathbb{R}^2,0) \arrow[d, "h"] \\
(\mathbb{R},0) \arrow[r, "\psi_i"] & (\mathbb{R}^2,0)
\end{tikzcd}$$

(где диффеоморфизмы τ и h от i не зависят); сильная эквивалентность: $\tau(t) = t + \mathrm{const}$.

1978-22. Как ведет себя смешанная структура Ходжа особенности под действием полной группы монодромии? (Это может выделять подгруппы в π_1?)

1979

1979-1. Как построить колчаны A, D, E из особенностей A, D, E (и их локальных колец)?

1979-2. Доказать, что функция $\min\limits_{y} F(x,y)$ топологически морсовская для F общего положения.

1979-3. Доказать полунепрерывность спектра особенности. Не является ли он спектром колебательной системы с μ степенями свободы — тогда разделение его спектром близкой системы с $\mu - 1$ степенью свободы получилось бы из теории Релея–Куранта–Фишера?

1979-4. Построить «комплексификацию» теории гомологий (заменив край двулистно разветвленным накрытием). Что является комплексификацией ориентации? [Вероятно, петле она сопоставляет элемент $\mathbb{Z} = \pi_1(\mathrm{U}(n))$?]

1979-5. Построить характеристические классы лагранжевых особенностей, исходя из стабильного кольца когомологий дополнений к каустикам.

1979-6. Всегда ли вещественная и комплексная модальности критических точек функций одинаковы?

1979-7. Проанализировать теорию огибающих с точки зрения теории особенностей — найти версальные деформации, бифуркационные диаграммы, связь с симплектической и контактной геометрией.

1979-8. Почему каустики неприводимы? Сколько неприводимых компонент у многообразия особенностей каустики?

1979-9. Исследовать свойства дискриминантов неквазиоднородных лежандровых особенностей: топологической классификации нет даже там, где есть гладкая (с модулями).

1979-10. Описать смешанные структуры Ходжа суперпозиций.

1979-11. Исследовать типичные особенности границы времяподобной достижимости.

1979-12. Исследовать особенности времени кратчайшего обхода препятствия.

1979-13. Верно ли, что особенности границы достижимости в системе общего положения такие же, как у проекции общего положения многообразия с краем? Более общим образом, «параметром» в задачах оптимизации является выбор управления из функционального пространства (возможно, имеющего край или иные особенности). Будут ли особенности границы достижимости такими же, как у общих проекций конечномерных многообразий с такими же особенностями?

1979-14. Верно ли, что особенности функции кратчайшего времени достижимости внутри области достижимости такие же, как у минимума семейства функций общего положения $\min\limits_y F(x,y)$?

1979-15. Исследовать бифуркации фазового портрета в двупараметрических общих системах векторных полей на плоскости, касающихся а) прямой, б) пары пересекающихся прямых (нормальные формы для собственных чисел 0, $\pm i\omega$ и $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$).

1979-16. Исследовать число нулей интеграла $I(h) = \oint_{\gamma_h}(P\,dx + Q\,dy)$, где γ_h — замкнутая кривая семейства зависящих от h циклов полиномиального поля, P и Q — многочлены от x, y данной степени [например, $\gamma_h = \{x, y : H(x,y) = h\}$, скажем, при $H = y^2 + x^3 - x$] — инфинитезимальный вариант вопроса 16-й проблемы Гильберта о циклах. Каково наибольшее число нулей $I(h)$ в случае, когда $I(h)$ — не тождественный нуль?

1979-17. Дать асимптотически точную оценку числа связных компонент пространства неособых действительных алгебраических гиперповерхностей степени n.

1979-18. Достигается ли равенство в неравенстве Петровского–Олейник?

1979-19. Справедлива ли гипотеза Рэгсдейл? Эту гипотезу можно переформулировать так. Пусть $f(x,y,z)$ — однородный многочлен четной степени, $F_\pm = f \pm t^2$, а $\mathbb{R}V_\pm$ — локальное многообразие уровня $F_\pm = \pm\varepsilon$. Гипотеза Рэгсдейл состоит в оценках чисел компонент

$$b_0(\mathbb{R}V_+) \leqslant h_1^{2,2}(F_+), \quad b_0(\mathbb{R}V_-) \leqslant h_1^{2,2}(F_-) + 1$$

через смешанную структуру Ходжа (при подходящем знаке f).

1979-20. Дать неулучшаемые оценки (через степень или через число Ходжа) для индивидуальных чисел Бетти действительных алгебраических гиперповерхностей, в частности, для числа компонент b_0. Быть может, легче оцениваются числа b_0, $b_0 - b_1$, $b_0 - b_1 + b_2$, …, а также комбинации локальных типовых чисел Морса M_0, $M_0 - M_1$, $M_0 - M_1 + M_2$, … (M_i — число сливающихся в нуле критических точек индекса i для какой-либо морсовизации однородного уравнения гиперповерхности).

1979-21. Какое наибольшее число ручек может иметь компонента алгебраической поверхности степени n в $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$?

1979-22. Оценить число овалов кривой, уравнение которой — малочлен, через число его членов.

1979-23. Сколько невыпуклых овалов может иметь плоская алгебраическая кривая степени n?

1979-24. Определяет ли изотопический тип пары (плоская M-кривая, ее комплексная ориентация) компоненту связности в пространстве неособых кривых фиксированной степени?

1979-25. Исследовать фундаментальную группу π_1 дополнения к множеству особых гиперповерхностей в комплексном проективном пространстве всех гиперповерхностей фиксированной степени в $\mathbb{C}\mathrm{P}^m$ и найти соответствующую группу монодромий (представление π_1 автоморфизмами группы гомологий гиперповерхности).

1979-26. Пусть P и Q в системе $\dot{x} = P(x,y)$, $\dot{y} = Q(x,y)$ — многочлены второй степени, а H — первый интеграл (не обязательно полиномиальный). Сколько предельных циклов может рождаться из компонент линий уровня H при малых возмущениях P и Q, оставляющих их многочленами второй степени?

1979-27. Пусть P и Q в системе $\dot{x} = P(x,y)$, $\dot{y} = Q(x,y)$ — степенные ряды, начинающиеся с однородных многочленов P_n, Q_n степени n.

Верно ли, что для почти всех пар (P_n, Q_n) число предельных циклов, рождающихся из нуля при малом возмущении системы, ограничено постоянной, зависящей лишь от n?

1980

1980-1. $I(h) = \oint_{H=h}(P\,dx + Q\,dy)$. Оценить сверху число нулей функции I.

1980-2. Краевая задача для $\dot{x} = P_n(x, e^{it})$, $x(2\pi) = x(0)$: число решений.

1980-3. Число предельных циклов, рождающихся из системы «Лотка–Вольтерра»

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\alpha + \beta x + \gamma y + \ldots) \\ \dot{y} = y(\delta + \varepsilon x + \zeta y + \ldots) \end{cases}$$

вблизи $\alpha = \delta = 0$. В частности, интегралы вдоль $x^p y^q z^r = h$, $z = 1 - x - y$.

1980-4. (Е. А. Демёхин) Объяснить странные бифуркации 2π-периодических решений уравнения $k^3 x^{\mathrm{IV}} + k\ddot{x} + \dot{x}^2 = 0$ при изменении параметра k.

1980-5. Исследовать структурную устойчивость контактных полей в $\mathbb{R}^3$.

1980-6. Применить смешанные структуры Ходжа в задаче о якобиане (ведь в обоих случаях аналитичность отличается от алгебраичности!).

1980-7. Построить теорию кобордизмов каустик (отличную от лагранжевых кобордизмов).

1980-8. Почему в теории особенностей (например, критических точек функций) коразмерность в вещественном случае такая же, как и в комплексном? *Сравнить с $\mathbb{R}$- и $\mathbb{C}$-модальностью и с (ко)размерностью продолжения линии самопересечения ласточкина хвоста или зонтика.*

1980-9. Применить смешанные структуры Ходжа в вещественной алгебраической геометрии — например, для оценок топологических инвариантов вещественных морсификаций — и для изучения топологии бифуркационных диаграмм.

1980-10. Применить смешанные структуры Ходжа в задачах о суперпозициях: ведь они «помнят» размерность гладкого алгебраического цикла, из которого произошел данный (ко)цикл (скажем, на графике или на дискриминанте или на дополнении).

1980-11. Доказать полунепрерывность спектра особенности: если особенность S примыкает к более простой особенности S' с $\mu' < \mu$, то $l_k \leqslant l'_k$ для $k = 1, \ldots, \mu'$.

1980-12. Комплексифицировать теорию гомологий.

1980-13. Существуют ли для полного сворачивания инвариантов формулы в терминах линеаризованного сворачивания (подобно формуле Кэмпбелла–Хаусдорфа, выражающей умножение в группе Ли в терминах коммутатора ее алгебры Ли)?

1980-14. Что является комплексным аналогом обобщенных групп Уайтхеда в алгебраической K-теории? *Один из кандидатов — «квазирезольвента» фундаментальной группы дополнения к бифуркационной диаграмме особенности.*

1980-15. Вложение базы $\mathbb{C}^{\mu'}$ версальной деформации более простой особенности S' в базу $\mathbb{C}^{\mu}$ версальной деформации более сложной особенности S ($\mu > \mu'$) индуцирует гомоморфизм

$$H^*(\mathbb{C}^{\mu} \setminus \Sigma) \to H^*(\mathbb{C}^{\mu'} \setminus \Sigma')$$

колец когомологий дополнений к соответствующим бифуркационным диаграммам.

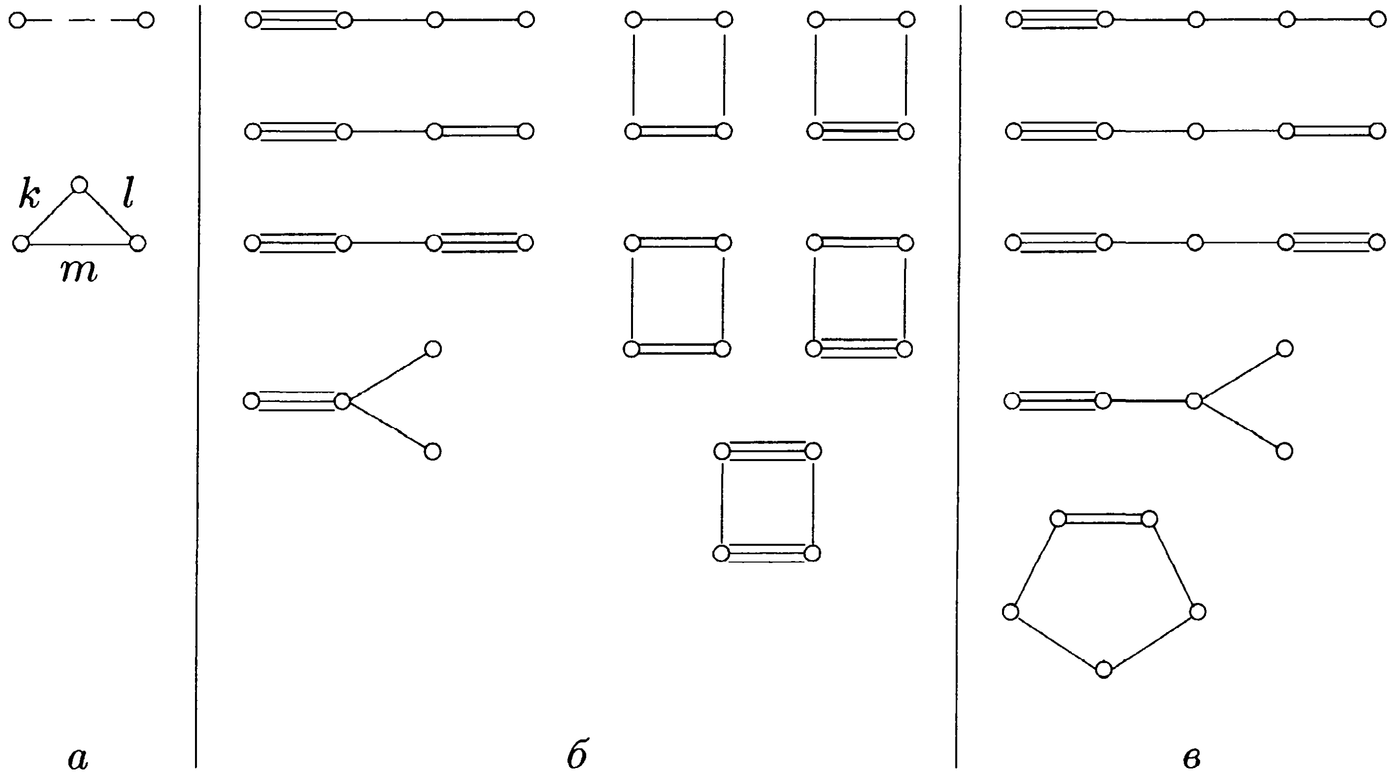
Являются ли эти гомоморфизмы каноническими? Можно ли определить стабильное кольцо когомологий?

1980-16. Всегда ли вещественная модальность конечнократной вещественной особенности $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ совпадает с комплексной модальностью?

1980-17. Доказать, что функция $F(y) = \max\limits_x f(x, y)$ топологически эквивалентна морсовской для семейства f общего положения.

1981

1981-1. Схемы Ланне́ра (схемы Кокстера для групп, порожденных отражениями относительно стенок симплексов в пространстве Лобачевского).



Симплексы в пространстве Лобачевского: а) серия на плоскости, б) 9 в трехмерном пространстве, в) 5 в четырехмерном пространстве.

Найти применение этих схем в теории особенностей.

1981-2. Вычислить наихудшие показатели Нехорошева для гамильтонианов общего положения с n степенями свободы (или хотя бы их асимптотики при больших n).

1981-3. Пусть

$$I_h(\lambda) = \int\limits_{x\in\mathbb{R}^k} e^{iS(x,\lambda)/h} a(x,\lambda)\,dx,$$

где функция S общего положения. Доказать, что для таких λ, для которых функция $S(\cdot,\lambda)$ морсовская, имеет место оценка

$$|I_h(\lambda)| \leqslant Ch^{k/2} \sum_{x\,\in\,\mathrm{crit}\,S(\cdot,\lambda)\,\cap\,\mathrm{supp}\,a(\cdot,\lambda)} \left|\det \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right|^{-1/2},$$

где crit — множество критических точек функции, а supp — носитель функции. *И. Колен де Вердье доказал это для простых или параболических особенностей.*

1981-4. Можно ли лагранжево точно вложить $\mathbb{T}^2$ в стандартное симплектическое пространство $\mathbb{R}^4$?

1981-5. Остается ли нестандартная контактная структура $\mathbb{R}^3$ нестандартной после любой комплексификации?

1981-6. Вычислить кольца когомологий $L_k = \lim\limits_{n\to\infty} \pi_{n+k} T\lambda_n$, где λ_n — тавтологические расслоения Грассмана над $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$ или $\mathrm{U}(n)/\mathrm{SO}(n)$, а T — пространство Тома.

1981-7. Квазифункцией называется точное лагранжево вложенное подмногообразие T^*V, изотопное нулевому сечению среди таких вложений. Критические точки — пересечения с нулевым сечением. Гипотеза: их не меньше у квазифункции, чем у функции.

1981-8. Какие функции на воротнике продолжаются в шар без критических точек?

1981-9. Кривых постоянной кривизны $K \neq 0$ на поверхности M^2, гомотопных 0 (ограничивающих диск на накрывающей), не меньше, чем критических точек у функции на M^2. *Контрпример — орициклы на поверхности постоянной кривизны! Но для* $\mathbb{T}^2$ *и* S^2 *эта гипотеза не опровергнута.*

1981-10. Построить теорию бифуркаций оптических каустик, в частности, доказать невозможность «летающих блюдечек».

1981-11. Найти лагранжеву особенность для H_4.

1981-12. Вычислить соотношения (Зарисского) между соотношениями (Зарисского) ласточкиных хвостов (и вообще исследовать «сизигии» или «некоммутативные резольвенты» фундаментальных групп дополнений алгебраических гиперповерхностей, связанные с последовательностью полных флагов проекций общего положения и с образующими и соотношениями последовательности фундаментальных групп дополнений к дискриминантам этих проекций).

1981-13. Вычислить фундаментальную группу пространства неособых плоских кривых данной степени d.

1981-14. Исследовать особенности плотности гравитационно эволюционирующей пылевидной среды при начальном потенциальном поле скоростей общего положения (даже на прямой!).

1981-15. Может ли центр тяжести выпуклой части замкнутой выпуклой поверхности совпасть с центром тяжести всей поверхности?

1981-16. Верно ли, что всякое индивидуальное полиномиальное векторное поле на плоскости имеет лишь конечное число предельных циклов? *А. Дюлак ошибся.*

1981-17. Исследовать число вращения аналитического диффеоморфизма окружности ($x \mapsto x + a + b \sin x$ и т. п.) как предел модуля эллиптической кривой, получающейся при $\operatorname{Im} a \neq 0$: каковы особенности аналитического продолжения числа вращения как функции от a?

1981-18. Существует ли кинематическое магнитное динамо в топологии трехмерного шара B^3?

1981-19. Контактизировать задачу об обходе препятствия.

1981-20. Верно ли, что особенности инкремента семейства матриц (многочленов) общего положения топологически устроены как выпуклая полиэдральная или хотя бы как морсовская функция (возможно, полиэдрально-выпуклая, морсовски-модифицированная вдоль параметров, от которых всё зависит гладко)?

1981-21. Исследовать особенности в типичных управляемых системах.

1981-22. Построить теорию версальных деформаций форм $f(x)\,(dx)^\alpha$.

1981-23. Сосчитать числа различных «перегибов» алгебраических поверхностей степени d в $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$.

1981-24. Исследовать, что дают смешанные структуры и спектры в задаче Брюса о максимальном числе морсовских точек на гиперповерхности степени d.

1981-25. Построить теорию монодромии (представления π_1 дополнения к бифуркационной диаграмме) для полных пересечений (а не только гиперповерхностей): флаги гиперповерхностей и последовательности диаграмм Дынкина.

1981-26. Исследовать влияние особенностей (перегибов разных типов) на асимптотики чисел целых точек на подмногообразиях евклидова пространства и в его областях (а также на диофантовы приближения).

1981-27. Построить теорию самопересечений лагранжевых и лежандровых многообразий: насколько они топологически необходимы (локально и глобально).

1981-28. Исследовать особенности выпуклых оболочек M^3 в $\mathbb{R}^4$ (главным образом их модули).

1981-29. Эллиптические координаты в $\mathbb{R}^n$:

а) «магнитное» обобщение теоремы Айвори (на формы);

б) бесконечномерные версии (с дискретным и непрерывным спектром): во что превращаются формулы Якоби, в частности — удивительная двойственность между выражениями импульсов в эллиптических координатах и формулой обращения координат;

в) эллиптические координаты и преобразование Гильберта;

г) уравнения математической физики, интегрируемые при помощи б).

1982

1982-1. Стандартна ли симплектическая структура в окрестности лагранжева раскрытия ласточкина хвоста?

1982-2. Суперлемма Морса–Дарбу.

1982-3. Описание поднимаемых диффеоморфизмов и полей в терминах поведения на особенностях внизу.

1982-4. В теории интегрируемых систем возникают группы Кокстера A, D, E (А. М. Переломов и др.). Не возникают ли в теории интегрируемых систем с краем (Е. К. Склянин) также $H_{3,4}$?

1982-5. Описать формы резонансных зон для отображений тора, заданных тригонометрическими многочленами, возмущающими сдвиг (системы типа Матье).

1982-6. Исследовать асимптотики решений уравнений теплопроводности на дифференциальных формах с переносом («динамо»): единственность стационарного решения в данном гомологическом классе.

1982-7. Исследовать особенности границ многообразий эллиптических и гиперболических многочленов.

1982-8. Первый лист гиперболической гиперповерхности выпуклый. Как это обобщается на второй, третий и т. д. листы?

1982-9. Что происходит с преобразованиями Лежандра (фронтами), если исходные функции (гиперповерхности) зависят от параметров и при некоторых значениях параметров становятся особыми? Какие получаются при этом перестройки двойственных объектов?

1982-10. Дополнить формальный анализ нормальных форм в работе Арнольд В. И. Перестройки особенностей потенциальных потоков в бесстолкновительной среде и метаморфозы каустик в трехмерном пространстве. *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, 1982, **8**, 21–57 исследованием гладких и аналитических нормальных форм.

1982-11. Доказать, что учет гравитационного взаимодействия в пылевидной среде не нарушает топологической картины перестроек каустик (при типичном начальном потенциальном потоке).

1982-12. Дан страт $\mu = \text{const}$. Каково наибольшее значение μ у примыкающих особенностей? Например, есть примыкание $P_8 \to E_6$, но нет $P_8 \to A_7$ или $P_8 \to D_7$.

1982-13. Найти нормальные формы типичной контактной структуры в окрестности ласточкина хвоста (исследовать также иерархии, возникающие из условий на ранги вдоль подмногообразий или на их касательные плоскости в особенности).

1982-14. Построить алгебраическую (аналитическую?) симплектическую (контактную) геометрию, переведя всё на язык идеалов. Пример: $df \neq 0$ заменить на $\exists h$: скобка Пуассона f и h есть 1. Некоторые теоремы, которые мы знаем в неособой ситуации, могут оказаться общими (скажем, для изолированных особенностей?).

1982-15. Пусть

$$\prod_{k=1}^{3} \frac{z^N - z^{A_k}}{z^{A_k} - 1} = \sum_r p_r z^r$$

(A_k, N — натуральные) — многочлен с неотрицательными коэффициентами p_r. Составим число $B(a) = \sum(p_r : aN < r < (a+1)N)$.

Увеличим дроби N/A_k (сохраняя неотрицательность коэффициснтов многочлена). Доказать, что тогда число $B(a)$ (нестрого) вырастет.

В n-мерном случае A_k/N — веса квазиоднородной функции с изолированной особенностью в 0.

1982-16. Рассмотрим многогранник Ньютона Δ в $\mathbb{R}^n$ и число $\mu(\Delta) = n!\,V - \sum(n-1)!\,V_i + \sum(n-2)!\,V_{ij} - \ldots$, где V — объем под Δ, V_i — объем под Δ на гиперплоскости $x_i = 0$, V_{ij} — на подпространстве $x_i = x_j = 0$, и т. д.

Тогда $\mu(\Delta)$ монотонно (нестрого) растет вместе с Δ (если Δ остается ковыпуклым *и целочисленным?*). *Элементарное доказательство неизвестно даже для $n = 2$.*

1982-17. Рассмотрим краевую задачу $\Delta u = 0$ в области, ограниченной квадрикой (скажем, гиперболой на плоскости, с граничным условием 1 на одной и 0 на другой компоненте). Тогда имеется «естественное» решение (на самом деле — имеется естественное условие на бесконечности).

Нет ли и для общих (гиперболических?) алгебраических гиперповерхностей разумной фильтрации в гармонических функциях и формах, восстанавливающей однозначное соответствие между (относительными) гомологиями и гармоническими представителями (для квадрик должны получиться ответы Вайнштейна–Шапиро)? Нет ли вещественного варианта смешанной структуры Ходжа?

1982-18. Построить теорию особенностей отображений симплектических (контактных) многообразий друг в друга (особенности — нарушения симплектичности).

1982-19. Исследовать симплектические соответствия — многозначные в обе стороны симплектоморфизмы

$$X^{2n} \subset (A^{2n} \times B^{2n}), \quad (\pi_A^* \omega_A + \pi_B^* \omega_B)|_{X^{2n}} \text{ симплектична.}$$

Найти иерархию ростков таких соответствий.

1982-20. Исследовать на рациональность ряды Пуанкаре естественных классификационных аналитических задач, например, для ростков типичных отображений в очень плохих размерностях, где функциональные модули неустранимы (или исключая ростки, образующие множество бесконечной коразмерности). Другой пример — классификация уравнений $y'' = F(x, y, y')$.

1982-21. Что происходит с триадами Гивенталя, если условие квадратичности нарушается (общим образом)?

1982-22. Может ли векторное поле дивергенции 0, касающееся слоев рибовского слоения, иметь экспоненциальное разбегание траекторий?

1982-23. Исследовать особенности в задаче об обходе препятствия для препятствия другой размерности (например, для кривых в $\mathbb{R}^3$).

1982-24. Может ли центр тяжести выпуклой части однородной сферы совпадать с центром сферы? Поскольку не может, имеет смысл попытаться доказать существование двух замкнутых кривых заданной положительной геодезической кривизны на сфере (магнитных траекторий): расслаиваем над S^2 многообразие выпуклых дисков и вариационно ищем условный экстремум вдоль слоя, а затем морсовски-критические точки экстремума вдоль базы.

1983

1983-1. Сколько точек (линий, ...) перегибов разных типов сливаются в особой точке гиперповерхности (подвергнутой общему диффеоморфизму)? *Ю. Плюккер: в* A_1 *сливаются* 6 *перегибов, в* A_2 — 8.

1983-2. Перенести теорему Куранта (нули n-й собственной функции задачи Дирихле для уравнения Лапласа делят область не более, чем на n частей) на системы (когда нули образуют множество коразмерности, большей 1).

1983-3. Переносится ли теория Конли–Цендера на обратимые системы (*которые столь похожи на гамильтоновы, что хочется считать гамильтоновость разновидностью суперобратимости*)?

1983-4. На вещественной плоскости выбрано N прямых. Какова наибольшая разность между числами белых и черных областей шахматной раскраски дополнения?

1983-5. Каково наибольшее число максимумов многочлена степени d от двух (от n) переменных? В частности, если все $(d-1)^2$ критических точек вещественны?

1983-6. Найти локальную контактную классификацию пар поверхностей в $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (в C^∞).

1983-7. Сколько невырожденных периодических орбит может иметь диффеоморфизм окружности, заданный тригонометрическим многочленом степени n? Гладкое отображение на себя? Диффеоморфизм, заданный тригонометрически-рационально?

1983-8. Исследовать вещественные формы групп отражений.

1983-9. Ограничено ли целочисленными инвариантами алгебраического автосоответствия (роды, бистепени) число периодических траекторий диффеоморфизма окружности на себя, комплексификацией которого является это автосоответствие?

1983-10. Рассмотрим проекцию $\mathbb{R}^{(n=)3} \to \mathbb{R}^{(k=)2}$ и прообразы целых точек (из $\mathbb{Z}^{(k=)2}$) — параллельные прямые (подпространства размерности $n-k$) в $\mathbb{R}^{(n=)3}$. Рассмотрим общую кривую (многообразие размерности $k-1$) γ в $\mathbb{R}^{(n=)3}$ и ее коэффициент зацепления со всеми прямыми (подпространствами размерности $n-k$). Исследовать его поведение при растяжениях γ в зависимости от перегибов γ (при $n=k$ это задача о числе целых точек в области!).

1983-11. Верно ли, что интегралы $I(h) = \oint_{H=h}(P\,dx + Q\,dy)$ при изменении многочленов P и Q заданной степени образуют чебышевскую систему (или по крайней мере что число нулей не намного больше)? Здесь H, например, — кубический многочлен $y^2 + x^3 - x$. Аналогичный вопрос — и для возмущений других интегрируемых полиномиальных векторных полей, например, для системы типа Лотка–Вольтерра [где $H = x^\alpha y^\beta z^\gamma$, $z = 1 - x - y$ с соответствующими (не полиномиальными!) P и Q].

1983-12. Перенести соотношение неопределенностей (связывающее проекции лагранжева многообразия на p- и q-подпространства) на лагранжевы многообразия с особенностями и на двойственность выпуклых многогранников. *Например, чем сильнее особенность осциллирующего интеграла (по длине волны $h \to 0$), тем меньше (в λ-пространстве) точек с такой асимптотикой [потому что функция $S(x,\lambda) - \lambda x$ морсовская по паре переменных]. Но, вероятно, можно сказать больше!*

1983-13. Дерамовская теория смешанных структур: попытаться определить фильтрации около особенности в *вещественном* случае через характер особенности формы.

1983-14. Описать при $\varepsilon \to 0$ распределение Гиббса эволюции плотности с малой диффузией ε под действием потока v с неоднозначным потенциалом U на многосвязном многообразии: $u_t + (uv)_x = \varepsilon\Delta u$, $v = -\nabla U$ (*например, v — псевдопериодическая функция на* $\mathbb{R}^2$, $v = ax+by+$*периодическая*; u — *функция на торе* $\mathbb{R}^2$/периоды) и процесс его установления (для U общего положения).

1983-15. Верно ли, что особенности границ эллиптичности и гиперболичности в семействах общего положения такие же (топологически? гладко?), как и особенности графиков функций максимума $\max\limits_y F(x, y)$ общих семейств F?

1983-16. Верно ли, что число предельных циклов, рождающихся в особой точке аналитической системы, ограничено (исключая системы, образующие множество коразмерности бесконечность, — *интегрируемые*?)?

1984

1984-1. Исследовать особенности границы пространства чебышевских систем функций.

1984-2. Построить теорию Морса с неголономными связями, например, для высших производных.

1984-3. Исследовать глобальные топологические ограничения на каустики, накладываемые положительной определенностью эйконала.

1984-4. Доказать, что на римановом торе $\mathbb{T}^2$ имеется $\geqslant 4$ (в общем положении) замкнутых (на накрывающей) кривых постоянной геодезической кривизны $K > 0$.

1984-5. Рассмотрим окружность $x^2 + y^2 = 1$ и квадратичную функцию с параболическими линиями уровня, пересекающими окружность не более двух раз [например, $y + (x - a)^2$, $|a| > a_0$, где значение $a_0 > 0$ определяется из того условия, что парабола $y + (x - a_0)^2 = c_0$ имеет при подходящем c_0 точку *кубического* касания с окружностью]. Определим соответствие, переставляя две точки пересечения. Произведение двух таких меняющих ориентацию соответствий (второе, например, меняет знак y или знак x) определяет диффеоморфизм окружности на себя, сохраняющий ориентацию. Ограничено ли число циклов (периодических траекторий) этого диффеоморфизма не зависящей от a постоянной?

1984-6. Расклассифицировать ростки пуассоновых структур «общего положения» в $\mathbb{R}^3$. *Что такое общее положение — нужно еще определить. Ситуация такая же, как и в классификации алгебр Ли или коммутирующих пар функций на симплектической плоскости и в других подобных задачах: исходное бесконечномерное пространство не гладкое и может иметь, вообще говоря, компоненты «разной размерности».*

1984-7. Построить теорию версальных деформаций фуксовых систем. Верно ли, что регулярные особенности — изомонодромные пределы фуксовых? Какие матрицы группы монодромии стремятся к матрицам Стокса при нерегулярном вырождении?

1984-8. Дать аксиоматическое определение кососимметрических вариантов групп монодромий простых особенностей (приводящее к их классификации, подобной классификации групп отражений или Вейля в симметрическом случае). Применить это определение к полным пересечениям (рассматривая флаг вложенных гиперповерхностей и последовательности систем корней).

1984-9. Конечно ли число диаграмм Дынкина (сильно отмеченных базисов) фиксированной особенности?

1984-10. Описать вариационные и симплектические свойства уравнений Пикара–Фукса (связностей Гаусса–Манина). Не эйлеровы ли они для подходящей группы?

1984-11. Перевести относительную теорию Морса на симплектический язык теории лагранжевых пересечений или лежандровых зацеплений.

1984-12. Перенести асимптотическое эргодическое определение инварианта Хопфа бездивергентного векторного поля на теорию Новикова, обобщающую умножение Уайтхеда в гомотопических группах.

1984-13. Существует ли отображение $\mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^2$ с одной только сборкой? *Да — решено Ю. В. Чекановым* 23 *октября* 1984 *г.*

1984-14. Что известно о $\mathbb{C}$-контактных структурах в $\mathbb{C}^3$?

1984-15. Как извлечь из «резольвент» фундаментальных групп дополнений алгебраических гиперповерхностей информацию, не зависящую от выбора образующих петель в последовательных фундаментальных группах дополнений к точкам на слоях $\mathbb{C}$ последовательных расслоений?

1984-16. Исследовать уравнение $dy/dx = f(x, y)$, где x и y — угловые координаты на окружности, а f — тригонометрический многочлен: сколько предельных циклов может быть при данном многоугольнике Ньютона?

1984-17. Доказать, что в стандартном симплектическом пространстве $\mathbb{R}^4$ нет точного вложенного лагранжева тора.

1984-18. Комплексифицировать теорему Ролля: если образ края диска равен 0 по модулю 2, то внутри есть критическая точка.

1984-19. Расклассифицировать зонтики в контактном пространстве (ростки в вершине с точностью до контактоморфизмов).

1984-20. Сосчитать число исчезающих перегибов (типа A_n) в особой точке гиперповерхности A_2 в $\mathbb{C}^3$ (в $\mathbb{C}^n$), подвергнутой общему диффеоморфизму (для $n = 2$ имеется 8 точек перегиба типа A_2 — формула Плюккера).

1984-21. Рассмотрим «обобщенную схему Бернулли» — сеть из одинаковых автоматов с конечным радиусом действия (и памятью) в $\mathbb{Z}^n$ ($n = 1$?). Можно ли извлечь из их работы разностную аппроксимацию к чему-либо не гауссовскому (т. е. не к уравнению теплопроводности)? К чему именно?

1984-22. Конечно ли (как утверждал Р. Том) число различных ростков бифуркаций топологии фазового портрета градиентной системы, зависящей общим образом от 4 параметров? *Р. Том утверждал, что их* 7, *по Б. А. Хесину их не меньше* 13 — *но, может быть, и бесконечное множество*?

1984-23. Построить супертеорию, четная составляющая которой соответствовала бы обратимым системам, а нечетная — гамильтоновым.

1985

1985-1. Исследовать особенности границы пространства фундаментальных систем решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка.

1985-2. Исследовать особенности границы пространства чебышевских систем функций.

1985-3. Исследовать топологические свойства границы устойчивости линейных обыкновенных дифференциальных уравнений порядка n и графика инкремента.

1985-4. Исследовать при $\varepsilon \to 0$ собственные функции с близкими к нулю собственными числами для уравнения на окружности $x \bmod 2\pi$

$$u_t + (uv)_x = \varepsilon u_{xx}, \quad v \text{ — потенциальное поле}$$

(исследовать также и случай многозначного потенциала).

1985-5. На $\mathbb{S}^3$ дана контактная структура (скажем, стандартная) и кривая — лежандров узел данного типа. Сколько у него можно гарантировать характеристических хорд (при любом выборе контактной формы)?

1985-6. Перенести гипотезу Рэгсдейл в теорию особенностей (правые части неравенств типа Рэгсдейл для морсовизаций особенности выразить через инварианты особенности вместо степени). *Даже в случае* $x^n + y^n$ *получается новая теория из-за верхних деформаций.*

1985-7. Доказать теоремы стабилизации всевозможных объектов: колец когомологий дополнений бифуркационных диаграмм (в $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$?), кратностей примыканий стратов, инкремента, границы гиперболичности, комплекса Васильева стратов и т. д.

1985-8. Построить $\mathbb{R}$- и $\mathbb{C}$-теории исчезающих перегибов (и уплощений).

1985-9. Аксиоматическое описание пуассоновых структур, возникающих из отображений периодов общих форм (даже для A_μ): а) вычислить ранги (например, лагранжевость) на касательных пространствах разных стратов дискриминантов, б) расклассифицировать все пуассоновы структуры с такими рангами. *Пример в* $\mathbb{C}^3$ *с обычным ласточкиным хвостом разобран.*

1985-10. Верно ли, что особенности границы гиперболичности содержат особенности границы эллиптичности (хотя бы стабильно)?

1985-11. Как связана неформальная комплексификация понятия ориентации со спинорными структурами?

1985-12. Являются ли уравнения Пикара–Фукса гамильтоновыми в какой-либо естественной симплектической структуре и нет ли у них положительного лагранжиана, отвечающего за неколеблемость (в каком-либо смысле)?

1985-13. Не упрощаются ли ужасные формулы теории представлений (коэффициенты Клебша–Гордана и т. п.) при помощи теории выпуклых многогранников? *Объемы сечений и числа целых точек в последних столь же сложно выражаются через, скажем, уравнения граней или координаты вершин многогранника, но концептуально — это простые объекты. Если заменить ужасные формулы этими простыми геометрическими объектами, то, может быть, станет легче. В частности — какова геометрия* $6j$ *символа (он отличен от* 0*, если из* 6 *длин можно построить тетраэдр): нет ли тут «целочисленных объемов»?*

1985-14. Построить теорию равномерных оценок не только осциллирующих, но и экспоненциальных многомерных интегралов (метода Лапласа), зависящих общим образом от параметров.

1985-15. Построить симплектическую или контактную версию теории H_3 и H_4 Щербака, заменив в ней обход препятствия общесимплектической конструкцией (подобно тому, как Р. Б. Мельроз препарировал бильярдную задачу).

1985-16. Переписать формулы Якоби в теории эллиптических координат на бесконечномерный случай (с дискретным спектром и предполагая нужную асимптотику осей, чтобы ряды сходились).

1985-17. Не связано ли сохранение формы пересечений особенности функции при стабилизирующем дописывании четырех квадратов с 8-периодичностью Ботта (*при стабилизации происходит* 8*-кратная надстройка слоя Милнора*)?

1985-18. Исследовать поведение смешанных структур Ходжа при суперпозициях алгебраических функций.

1985-19. Является ли отображение моментов, переводящее набор точек $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n$ данных масс $m_i > 0$ в набор моментов $M_k = \sum_i m_i x_i^k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, гомеоморфизмом выпуклого многогранника на его образ?

1985-20. Гомотопическая классификация невырожденных однородных полей фиксированной степени: сколько у пространства таких полей компонент связности? *Пример — кубические поля в* $\mathbb{R}^3$: *каков максимальный индекс такого поля*?

1985-21. Нет ли комплексификации у теоремы Куранта о нулях n-й собственной функции оператора Лапласа (если значения комплексные и нули не делят пространство)?

1985-22. Исследовать топологию страта Максвелла простых вещественных и комплексных особенностей; есть ли стабилизация колец когомологий дополнений?

1985-23. Сколько сборок необходимо имеет общее отображение $S^2 \to S^2$ степени n?

1985-24. Пусть открытый ласточкин хвост, лежащий в дискриминанте (либо как кратное самопересечение, либо как страт $A_{\approx n/2}$), лагранжев в некоторой симплектической структуре. Расклассифицировать продолжения этих структур на весь дискриминант.

1985-25. Как устроена стратификация границы однолистности в пространстве голоморфных отображений круга на плоскость? Описаны ли страты малых коразмерностей и бифуркационные диаграммы?

1985-26. Гипотеза Болла: рассмотрим пирамиду внутри ласточкина хвоста,

$$\left\{ x^{n+1} + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i),\ x_i \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Ограничим ее условием $|a_1| \leqslant 1$. Тогда для любых двух точек полученной ограниченной области на расстоянии d в $\mathbb{R}^n$ существует соединяющая их внутри этой области кривая длины меньше Cd, где постоянная C от точек не зависит.

Более общим образом: как описать полуалгебраические множества с таким свойством псевдовыпуклости (называемым свойством Уитни)?

1986

1986-1. Сколько компонент связности имеет пространство лагранжевых торов в $T^*\mathbb{T}^2$, изотопных нулевому сечению среди всех торов?

1986-2. Дан квадратично выпуклый по импульсам гамильтониан в $T^*\mathbb{T}^2$. Предположим, что торы предыдущей задачи лежат на его гиперповерхности уровня 1 (деформация в этом случае — это деформация пары: тор, гамильтониан). Сколько компонент связности в пространстве таких пар (топологически тривиальных)?

1986-3. Твердое тело управляется моментом заданной величины, ориентацию которого относительно тела (спутника) мы можем выбирать как управляющий параметр. Требуется скорейшим образом повернуть тело из одного состояния в другое [осуществить поворот из SO(3)], скажем, с нулевой начальной и конечной угловой скоростью.

Описать оптимальное управление [прежде всего, топологию многообразия разрыва этого управления на SO(3)].

1986-4. Чисто мнимой паре собственных чисел соответствует, вообще говоря, ляпуновская инвариантная поверхность. Исследовать перестройки этих поверхностей при резонансах.

1986-5. Перенести теорию Смейла–Хирша на лагранжевы и лежандровы полоски (ростки лагранжевых или лежандровых многообразий вдоль принадлежащих этим многообразиям кривых) или на соответствующие оснащенные кривые.

1986-6. Ограничен ли диаметр группы симплектоморфизмов шара B^{2n}? Гипотетически — нет [*в двумерном случае это доказано А. И. Шнирельманом, но и в многомерном ввиду сильной неодносвязности группы симплектических матриц* ($\pi_1 = \mathbb{Z}$) *можно сильно завращать центральный шар, и этот диффеоморфизм гипотетически далек от единицы*].

1986-7. Найти асимптотику числа меандров реки с $n \to \infty$ мостами.

1986-8. Исследовать особенности видимых контуров выпуклых тел.

1986-9. В теории оптимизации встречается ситуация, когда не постоянное (скажем, периодическое) управление дает в среднем за большое время лучший результат, чем любой фиксированный выбор параметра.

Исследовать эту ситуацию с точки зрения общего положения и бифуркаций. *Ситуация напоминает фазовый переход. При этом оптимальный в среднем режим, вообще говоря, может быть и не периодический, а более сложный*!

1986-10. Переформулировать теорему о трех точках перегиба проективной кривой и о четырех вершинах евклидовой кривой в терминах симплектической или контактной топологии.

1986-11. Кроме моделей со внутренними степенями свободы вдоль маленького слоя расслоения над пространством-временем мыслимы модели типа поверхностного натяжения, в которых фундаментальные законы гидродинамики действуют в большем пространстве, но находящийся на поверхности наблюдатель видит лишь их проявления в меньшем (разность размерностей может быть и больше 1). Какими общими чертами обладают модели этого типа — какова структура их уравнений движения?

1986-12. Исследовать особенности уровня $u = 0$ для функций u двух переменных, удовлетворяющих уравнению (Эйлера) $\exists f : \Delta u = f(u)$. Изучить случай общего положения и бифуркации коразмерностей 1 и 2.

1987

1987-1. Перенести теорию распределения Гиббса [для одномерной эволюции $u_t + (uv)_x = \varepsilon u_{xx}$] на случай дискретного времени (отображение $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, близкое к тождественному, возмущается малой диффузией). Во что превращается теория близких к нулю собственных чисел, соответствующих точечным аттракторам поля v?

1987-2. Симплектизировать теорию неколеблемости (в частности, теорему Пойа о факторизации на отрезке).

1987-3. Преобразование z^2 переводит траектории малых колебаний в ньютоновы эллипсы. А что делает преобразование z^α?

1987-4. Рассмотрим поверхности всюду постоянной сигнатуры в $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, например, сигнатуры $(1,1)$ в $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ (компактификация проблемы Гильберта о вложении поверхности всюду отрицательной кривизны в $\mathbb{R}^3$).

a) Верно ли, что множество таких поверхностей имеет одну лишь компоненту связности?

b) Верно ли, что всякая такая поверхность разделяет две прямые [в случае сигнатуры (k,l) — разделяет $\mathbb{R}\mathrm{P}^k$ и $\mathbb{R}\mathrm{P}^l$ в $\mathbb{R}\mathrm{P}^{k+l+1}$]? *При* $k=0$ *это верно: выпуклая гиперповерхность аффинна.*

c) Верно ли, что всякая такая гиперповерхность двулистно накрывает $\mathbb{R}\mathrm{P}^k \times \mathbb{R}\mathrm{P}^l$ (и даже что разделяемые $\mathbb{R}\mathrm{P}^k$ и $\mathbb{R}\mathrm{P}^l$ можно выбрать так, что каждая соединяющая их прямая пересекает гиперповерхность ровно дважды)? *При* $k=0$ *это верно: выпуклая гиперповерхность звездна относительно любой точки ограниченной ею области.*

d) «Принцип максимума»: рассмотрим в полосе $|z| \leqslant 1$ в $\mathbb{R}^3$ гиперболическую поверхность, касающуюся конуса $x^2+y^2=z^2$ вдоль окружностей $z=\pm 1$. Тогда внутрь конуса поверхность не заходит. Обобщить на другие краевые условия!

1987-5. Исследовать глобальные топологические свойства каустик и фронтов лежандровых многообразий (специальным образом — оптических, для которых ответы могут быть другими!).

1987-6. Вычислить $\pi_3(\mathbb{C}^n \setminus \Sigma^{n-2})$, где Σ^{n-2} — ребро возврата ласточкина хвоста. *Разумеется, здесь подразумеваются и аналогичные вопросы в* $\mathbb{R}^n$ *и для стратов большей коразмерности и старших* π_i.

1987-7. Сколько компонент связности имеет дополнение к шлейфу полного флага в окрестности этого флага в $\mathbb{R}^n$? *При* $n = 2$ *их* 2, *при* $n = 3$ *их* 6.

1987-8. Сколько компонент связности имеют дополнения к бифуркационным диаграммам функций и к дискриминантам простых (хотя бы) особенностей в пространствах вещественных версальных деформаций?

1987-9. Встречается ли список Казаряна простых диаграмм Юнга в качестве ответа в какой-либо другой классификационной задаче?

1987-10. Как растет при $N \to \infty$ число критических точек N-й собственной функции лапласиана в n-мерной области? Как $N^{1/n}$?

1987-11. Какие особенности имеет решение вариационной задачи минимизировать интеграл Дирихле $\int \nabla u^2\, dx$ по всем функциям u, полученным из данной сохраняющим площади диффеоморфизмом области определения (например, круга)? *Если данная функция обращается в ноль на краю диска и имеет один максимум, то экстремум — гладкая центрально-симметричная функция с такими же площадями множеств меньших значений. Если же начальная функция, подобно Эльбрусу, имеет две вершины (два максимума) и седло, то физики утверждают, что численный эксперимент дает функцию с особенностью вдоль заменяющего седло отрезка.*

1987-12. Исследовать разбиение пространства линейных комплексных уравнений с особенностями на классы изомонодромных (особенно интересны пределы изомонодромных систем со сливающимися особыми точками — их версальные деформации, бифуркационные диаграммы и т. д.).

1987-13. Исследовать вырождения симплектических структур в пространстве замкнутых 2-форм: стратификация границы многообразия симплектических структур, бифуркационные диаграммы в точках стратов конечной коразмерности на границе, ...

1987-14. Существуют ли гладкие гиперповерхности в $\mathbb{R}^n$, для которых объем сегмента, отсекаемого любой гиперплоскостью от ограниченного ими тела — алгебраическая функция от гиперплоскости (исключая квадрики в нечетномерных пространствах)? *Для этих квадрик объем — алгебраическая функция (Архимед), а площадь для сегментов плоских кривых никогда не алгебраична (Ньютон).*

1987-15. Определить «асимптотический инвариант Штурма», описывающий средние лагранжевы осцилляции уравнений в вариациях гамильтоновой системы [в таком же смысле, в котором асимптотический инвариант Хопфа считает среднее число нулей (со знаками) решений уравнения в нормальных вариациях — этот факт тоже нуждается в формализации].

1987-16. Исследовать границу множества линейных уравнений 2-го порядка, обладающих свойством перемежаемости корней решений (и перенести на лагранжеву перемежаемость гамильтоновых систем с n степенями свободы).

1987-17. Плотны ли преобразования фазовых потоков контактных полей в $\mathbb{S}^3$ среди контактоморфизмов из компоненты единицы?

1988

1988-1. Классифицировать особенности контактно-пуассоновых структур.

1988-2. Каков максимум разности между числом максимумов и числом минимумов многочлена степени n в $\mathbb{R}^2$? Тот же вопрос для $\mathbb{R}$-морсификаций особенностей.

1988-3. Исследовать нормальные формы квадратичного конуса в контактном пространстве $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^5$) с точностью до C^∞ и аналитических ростков контактоморфизмов в вершине.

Вопрос связан с теорией трансформаций волн и с релаксационными колебаниями, см. статью: Арнольд В. И. О поверхностях, определяемых гиперболическими уравнениями. *Матем. заметки*, 1988, **44**(1), 3–18 [*перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 397–412].

1988-4. Каково максимальное число периодических орбит диффеоморфизма $\mathbb{S}^1$, заданного эллиптическими функциями, вроде $x \mapsto x + a + \varepsilon \operatorname{sn} x$?

1988-5. Найти верхнюю грань показателя Гёльдера непрерывного («пеановского») отображения квадрата на куб (достигается ли 2/3?). *Решено Е. В. Щепиным.*

1988-6. Может ли число точек пересечения образа окружности под действием n-й итерации аналитического диффеоморфизма поверхности с другой (неподвижной) окружностью расти быстрее любой экспоненты n? *Решено О. С. Козловским.*

1988-7. Может ли число периодических траекторий вещественно-аналитического отображения поверхности в себя расти быстрее любой экспоненты периода?

1988-8. Могут ли различные топологические инварианты пересечения $(A^n X^k) \cap Y^l$, а также числа Милнора и другие локальные характеристики касания ростков $(A^n X^k, 0)$ и $(Y^l, 0)$ [в случае $A(0) = 0$], расти быстрее любой экспоненты n?

1988-9. Доказать стабилизацию при $\mu \to \infty$ гомотопического типа дополнения $\mathbb{R}^\mu \setminus A_k$, где A_k — соответствующий страт дискриминанта A_μ (коразмерности k).

1988-10. Доказать аналогичную стабилизацию для комплексификаций, $\mathbb{C}^{\mu} \setminus {}^{\mathbb{C}}A_k$.

1988-11. Перенести теорему о четырех вершинах плоской кривой на кривые на сфере S^2.

1988-12. Если якобиан ростка отображения $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ есть тождественный ноль, то отображение пропускается через кривую: $\mathbb{R}^2 \to \to K^1 \to \mathbb{R}^2$. Придать этому утверждению точный смысл (алгебраизировать), например, начиная с формальных рядов и кончая C^{∞}.

1988-13. Доказать, что в $\mathbb{R}^{2n}$ нет (невыпуклых) гиперповерхностей, которые алгебраически интегрируемы (объем части, отсекаемой гиперплоскостью, не может быть алгебраической функцией от гиперплоскости). *Для $n = 1$ это показал Ньютон.*

1988-14. Дать формальное определение интегрируемости дифференциального уравнения, заданного векторным полем на многообразии (не зависящее от алгебраической или иной подобной структуры многообразия, т. е. такое, чтобы свойство интегрируемости было инвариантно относительно диффеоморфизмов многообразия). Доказать неинтегрируемость в этом смысле, например, типичных гамильтоновых систем, близких к интегрируемым общего положения.

1988-15. Перенести теорему о четырех омбилических точках поверхностей в симплектическую или контактную топологию лагранжевых или лежандровых особенностей (неизбежность D^4).

1988-16. Теория вторых кос: рассмотрим в $\mathbb{C}^{\mu+1}$ гиперповерхность $\Gamma_0 : z^{\mu+1} + \lambda_1 z^{\mu-1} + \dots + \lambda_{\mu} = 0$ и последовательность проекций $\mathbb{C}^{\mu+1} \to \to \mathbb{C}^{\mu} \to \mathbb{C}^{\mu-1} \to \cdots$ (вдоль осей $z, \lambda_{\mu}, \lambda_{\mu-1}, \dots$). Дискриминант проектирования гиперповерхности Γ_0 на $\mathbb{C}^{\mu}$ есть гиперповерхность Γ_1 в $\mathbb{C}^{\mu}$. Фундаментальная группа дополнения к Γ_1 — это группа кос.

Определим последовательно гиперповерхность Γ_k в $\mathbb{C}^{\mu+1-k}$ как дискриминант проектирования гиперповерхности Γ_{k-1} из $\mathbb{C}^{\mu+2-k}$ на $\mathbb{C}^{\mu+1-k}$.

Исследовать эти гиперповерхности: являются ли дополнения пространствами $K(\pi, 1)$? Каковы их фундаментальные группы? Можно ли описать последние как группы «соотношений Зарисского» между соотношениями Зарисского предыдущей фундаментальной группы?

Случаи $k = 1$ (*описание группы кос как подгруппы группы автоморфизмов свободной группы*) *и* $k = 2$ (*описание фундаментальной группы дополнения к бифуркационной диаграмме*) *изучены, но случай* $k = 3$ *уже открыт для исследования, даже при малых* μ. *Впрочем, быть может, более в духе описания фундаментальных групп дополнений по Зарисскому было бы заменить данный флаг проектирований флагом общего положения* (*для нашего флага некоторые страты проектируются на одно и то же подмногообразие*).

1988-17. Рассмотрим «стохастическую паутину»

$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 : \sum_{i=1}^{5} \cos(x, v_i) = c\right\}$$

(где векторы v_i образуют правильный пятиугольник). Верно ли, что диаметры компонент этой кривой, содержащих 0 внутри, ограничены сверху?

1988-18. Рассмотрим отображение плоскости в себя $T = AB$, где $B(x, y) = (x, y + \varepsilon \sin x)$, а A — поворот на угол $2\pi/5$. Рассмотрим инвариантные кривые отображения T, ограничивающие область, содержащую 0 внутри. Ограничены ли сверху их диаметры?

1988-19. Параметрические неравенства Морса для A_3 и других особенностей. Рассмотрим гладкую функцию общего положения на пространстве гладкого расслоения (например, со слоем окружность и с двумерной базой). Над некоторыми точками базы ограничение функции на слой имеет неморсовские особенности: A_2 на некоторой гиперповерхности в базе (на каустике), A_3 на страте коразмерности 2 в базе (в отдельных точках базы в случае двумерной базы — точках возврата каустики).

Исследовать связи между нетривиальностью расслоения (например, дифференциалами его спектральной последовательности) и неизбежно присутствующими стратами особенностей на базе (например, минимальным числом точек возврата каустики, когда база двумерна).

1988-20. Дан диффеоморфизм границы многообразия в себя, продолжаемый до диффеоморфизма многообразия. Всегда ли он продолжается до диффеоморфизма, сохраняющего объемы? Какие свойства на границе гарантируют существование неподвижных точек сохраняющего объемы продолжения внутри? *Пример*: $\mathbb{S}^1 \times D^2$.

1988-21. Дано поле направлений на $\mathbb{S}^3$. Включаются ли эти направления в плоскости так, чтобы полученное распределение плоскостей было инвариантным относительно потока векторного поля v данного направления? $(\exists \alpha, \beta: \ \alpha|v = 0,\ d\alpha = \alpha \wedge \beta)$

1988-22. Дано поле дивергенции 0 на $\mathbb{S}^3$. Существует ли контактная структура, в которой оно лежандрово? Такая структура, диффеоморфная стандартной?

1988-23. Перенести конструкцию Понтрягина и Тома теории кобордизмов на вещественные алгебраические функции. Свойству Серра расслоения соответствует возможность накрыть типичную деформацию множества вещественных корней многочлена (которые при этом могут исчезать парами) деформацией самого многочлена. Изоморфизму Понтрягина между гомотопическими группами сфер и группами кобордизмов оснащенных многообразий соответствует в теории вещественных алгебраических функций одной переменной изоморфизм между гомотопическими группами пространства функций с умеренными особенностями и группами кобордизма плоских кривых без горизонтальных касательных перегиба (см. статью Арнольд В. И. Пространства функций с умеренными особенностями. *Функц. анализ и его прилож.*, 1989, **23**(3), 1–10 [*перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 455–469]). Но этот пример наталкивает на мысль, что аналогия простирается значительно дальше и может быть формализована в виде соответствующего исчисления особенностей.

1988-24. Множество квадратичных форм в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, имеющих кратное собственное число, образует многообразие коразмерности два в пространстве форм. Можно ли представить соответствующий дискриминант в виде суммы квадратов двух функций (многочленов, степенных рядов)? *Для $n = 2$ это так.*

Для эрмитова случая коразмерность (и число квадратов?) равна трем. Для гиперэрмитова случая SU(2)-инвариантных квадратичных форм в $\mathbb{R}^{4n}$ — пяти.

1988-25. Рассмотрим (быть может, косо-) коммутативное градуированное кольцо (или лучше $\mathbb{R}$- или $\mathbb{C}$-алгебру) с рядом Пуанкаре $1 + t + t^2 + \cdots$ (одна аддитивная образующая каждой степени). Расклассифицировать такие кольца (алгебры) с данными степенями мультипликативных образующих.

В простейшем нетривиальном случае коммутативного кольца с тремя мультипликативными образующими степеней 1, 2, 3 число таких алгебр равно 5. В общем случае неясно, для каких наборов степеней объект прост (нет модулей): гипотетически это всегда так для трех мультипликативных образующих.

1988-26. Эксцентриситет гильбертова пространства. Рассмотрим наименьший радиус $R(N)$ N покрывающих единичный шар в $\mathbb{R}^n$ шаров и наибольший радиус $r(N)$ N непересекающихся шаров, лежащих в единичном шаре в $\mathbb{R}^n$. Отношение $R(N)/r(N) = \rho(N)$ стремится при увеличении числа шаров N к пределу ρ, называемому *эксцентриситетом* пространства $\mathbb{R}^n$. Исследовать асимптотическое поведение эксцентриситета при росте размерности n. *Возможно,* $\lim\limits_{n\to\infty} \rho = \sqrt{2}$.

1988-27. Пусть $K\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}_+$ — произвольная гладкая положительнозначная функция на римановом торе. Рассмотрим движение заряженной частицы на этом торе в присутствии нормального к тору магнитного поля K, т. е. движение вдоль кривых на торе, геодезическая кривизна которых в каждой точке равна заранее заданному (в этой точке тора) положительному числу K.

Предположим, что метрика на торе плоская. Движение частицы (со скоростью 1) описывается кривой в $\mathbb{T}^3 = T_1\mathbb{T}^2$. Стандартная метрика определяет параллелизацию, т. е. разложение $\mathbb{T}^3 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{T}^2$. Из положительности кривизны K вытекает, что фазовые кривые на $\mathbb{T}^3$ трансверсальны к слоям $\{\varphi\} \times \mathbb{T}^2$. Таким образом, мы получаем отображение Пуанкаре слоя $\{0\} \times \mathbb{T}^2$ в себя. Это отображение является гомологичным тождественному симплектоморфизмом для подходящей симплектической структуры на $\{0\} \times \mathbb{T}^2$.

Доказать, что такое отображение Пуанкаре гомологично тождественному и в случае движения на торе с произвольной римановой метрикой, близкой к плоской.

1988-28. Доказать, что в ситуации предыдущей задачи отображение Пуанкаре гомологично тождественному в случае движения на торе $\mathbb{T}^2$ с произвольной римановой метрикой, если только геодезическая кривизна K достаточно велика.

1988-29. Пусть на торе $\mathbb{T}^2$ заданы произвольная метрика и произвольная положительнозначная функция K. Существует ли отображение Пуанкаре или даже существует ли поверхность, трансверсальная векторному полю движения заряженной частицы на $\mathbb{T}^2$ в магнитном поле K и изотопная сечению расслоения $T_1\mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$?

1988-30. Доказать существование ожидаемого числа замкнутых траекторий движения заряженной частицы в магнитном поле на произвольной поверхности — по крайней мере в тех случаях, когда поле K достаточно сильное или когда метрика близка к метрике постоянной кривизны. *Я полагаю, что здесь целесообразно воспользоваться непосредственно «гиперболической теорией Морса», а не сводить задачу к неподвижным точкам симплектоморфизма. В случае достаточно сильного магнитного поля K эта гипотеза доказана: число замкнутых орбит не меньше $2g+2$ на поверхности рода g, ср. задачу 1994-14.*

1988-31. Обобщение предыдущей задачи: рассмотрим нетривиальное расслоение $M^3 \to N^2$ со слоем $\mathbb{S}^1$ и со связностью (заданной полем двумерных плоскостей, трансверсальных слоям). Обозначим через τ некоторый элемент объема на M^3 и через v бездивергентное (относительно τ) векторное поле, трансверсальное плоскостям этой связности. Оценивается ли снизу число замкнутых орбит такого векторного поля минимальным числом критических точек функции на поверхности N^2 (ориентированной и без края)?

1988-32. Частный случай предыдущей задачи: у любого ли бездивергентного векторного поля на $\mathbb{S}^3$, образующего в каждой точке острый угол с полем Хопфа, есть по меньшей мере две геометрически различные замкнутые орбиты?

1989

1989-1. Расклассифицировать простые особенности функций на супермногообразиях.

1989-2. Может ли число неподвижных точек n-й итерации бесконечно гладкого отображения компактного многообразия в себя расти с ростом n быстрее любой наперед заданной последовательности a_n (для некоторой подпоследовательности моментов времени n_i)?

1989-3. Вычислить π_2(дополнение к страту A_3 в ласточкином хвосте в $\mathbb{R}^n$) для нестабильных размерностей n.

1989-4. Исследовать кольца когомологий дополнений к бифуркационным диаграммам функций A_k в $\mathbb{C}^{k-1}$ (в том числе стабилизацию при $k \to \infty$ и поведение при отображении Ляшко–Лойенги, а также связи со стратами диаграммы). *Это — когомологии «второй группы кос», поскольку дополнение бифуркационной диаграммы в* $\mathbb{C}^{k-1}$ *есть* $K(\pi, 1)$.

1989-5. Какая функция на многообразии может служить якобианом?

1989-6. Построить относительный вариант теоремы Мозера о симплектических структурах (фиксируется подмногообразие и 2-форма на нем).

1989-7. Перенести неравенства Гарнака, Петровского и т. д. на псевдопериодические гиперповерхности, заданные суммами (несоизмеримых) гармоник вида $A\cos((k, x) + a)$ в $\mathbb{R}^n$ (изучить плотности топологических объектов на единицу объема). *Например, число максимумов или числа Бетти области* $f \leqslant c$ *или ее эйлерова характеристика* *в большом шаре радиуса R делятся на R^n и R устремляется к бесконечности — предельную «плотность максимумов» или «плотность чисел Бетти» или «плотность эйлеровой характеристики» требуется оценить сверху через число гармоник (или, если можно, через многогранник Ньютона?).*

1989-8. Невыпуклая проблема Минковского. Дано отображение общего положения $S^2 \to S^2$ степени 1. Рассмотрим его якобиан как (многозначную) функцию на сфере-образе. Какие условия на эту функцию гарантируют существование гауссова отображения (иммерсированной в $\mathbb{R}^3$ сферы) с таким якобианом?

Если особенностей нет, то единственное условие состоит в том, что центр тяжести соответствующего распределения масс на сфере-образе попадает в нуль (теорема Минковского).

1989-9. Расклассифицировать флаги в симплектическом пространстве и симплектические простые колчаны.

1989-10. Исследовать системы фронтов и лучей, заданных гиперболическими вариационными принципами, вблизи типичных особенностей поверхности нулей символа (для размерностей 2 и 3 физического пространства).

1989-11. Расклассифицировать окрестности кривых рода g на комплексных поверхностях. *Случай эллиптической кривой, $g = 1$, подробно разобран, например, в книге* Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, § 27.

1989-12. Инфинитезимальный вариант задачи о периодических орбитах соответствий: пусть $A\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ — диффеоморфизм вещественного овала алгебраической кривой, аналитическое продолжение которого является соответствием на римановой поверхности, и такой, что $A^k = \mathrm{id}$. Сколько периодических орбит (периода n) может родиться при малом его возмущении (в классе вещественных алгебраических автосоответствий того же бирода и бистепени): ограничено ли это число функцией от n? Постоянной, не зависящей от n (равномерно по возмущениям или хотя бы в первом по возмущениям приближении)?

1989-13. В задаче об обходе препятствия исследовать асимптотику, в которой препятствие размыто и заменено крутым потенциалом.

1989-14. Рассмотрим в пространстве многочленов $\mathbb{R}^n = \{x^{n+1} + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n\}$ подмногообразие A_3 (коразмерности 2), состоящее из многочленов с трехкратным корнем. Фундаментальная группа дополнения этого подмногообразия есть $\mathbb{Z}$. Многочлен от двух переменных $x^{n+1} + a_1(y)x^{n-1} + \cdots + a_n(y)$ естественно определяет кривую в $\mathbb{R}^n$. Типичная кривая не пересекает подмногообразие A_3. Фиксируя граничные условия при $y \to \pm\infty$, можно сопоставить такой кривой целое число [элемент $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus A_3) \approx \mathbb{Z}$], называемое *индексом* и измеряющее число оборотов кривой вокруг A_3.

Найти наименьшую степень многочлена от двух переменных (или многочленов a_j по y), при которой реализуется данное значение i этого индекса.

Исследование этого вопроса привело В. А. Васильева к задаче о минимальной степени полиномиального отображения $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, реализующего фиксированный узел. Анализ возникающего инварианта узлов привел его к теории инвариантов конечного порядка.

1989-15. На какое наибольшее число частей делят сферу нули сферической функции, являющейся многочленом степени n?

Известная теорема Куранта дает (для двумерной сферы) оценку сверху величиной $n^2/2 + O(n)$, а примеры В. Н. Карпушкина — оценку снизу величиной $n^2/4 + O(n)$.

Каково наибольшее число максимумов такой функции?

1989-16. Найти число компонент пространства невырожденных однородных уравнений $\dot{x} = P(x)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, компоненты P — однородные многочлены второй степени, не имеющие, кроме начала координат, общих нулей.

Геометрическая задача (при $n = 4$) сводится к исследованию деформаций четверок квадрик (эллипсоидов) в проективном пространстве. Квадрикам разрешается вырождаться, даже исчезать, но запрещается всем вместе иметь общую точку. Спрашивается, сколько имеется негомотопирующихся друг в друга четверок (при $n = 3$ — троек эллипсов; в этом случае ответ 2, эллипсы одной тройки не пересекаются, а для другой тройки каждый эллипс разделяет две точки пересечения двух других эллипсов).

1989-17. Сколько предельных циклов может рождаться при малом полиномиальном степени n возмущении интегрируемой полиномиальной системы степени n?

Вопрос сводится к исследованию числа нулей интеграла

$$I(h) = \oint \frac{P\,dx + Q\,dy}{M}$$

по овалам $H = h$ системы $\dot{x} = X(x, y)$, $\dot{y} = Y(x, y)$ с интегрирующим множителем M, где X, Y, P, Q — многочлены степени n. Он не решен даже при $n = 2$ и даже в случае $M = 1$, когда H — многочлен. В случае, когда $M = 1$, H, P, Q — многочлены фиксированной степени, для числа нулей имеется равномерная оценка сверху (А. Н. Варченко, А. Г. Хованский), но она неэффективна.

1989-18. Последовательность *меандрических чисел* 1, 1, 2, 3, 8, 14, 42, 81, … определяется так. Пусть бесконечная река, текущая с юго-запада на восток, пересекает бесконечное шоссе, идущее прямо с запада на восток, под n мостами, занумерованными числами $1, \ldots, n$ с запада на восток вдоль шоссе. Порядок, в котором мосты встречаются на реке, определяет *меандрическую перестановку* чисел $1, \ldots, n$. Меандрическое число M_n — это число меандрических перестановок из n элементов.

Меандрические числа обладают замечательными свойствами, например, M_n нечетно, если и только если n — степень двойки (С. К. Ландо). Найти асимптотику M_n при $n \to \infty$. *Известно, что* $c\,4^n < M_n < C\,16^n$, $c, C = \mathrm{const}$.

1989-19. Верно ли, что минимум хаусдорфовых размерностей минимальных аттракторов уравнения Навье–Стокса (скажем, на двумерном торе) растет с возрастанием числа Рейнольдса?

Не доказано даже существование хотя бы каких-нибудь минимальных аттракторов растущей с числом Рейнольдса размерности, известны лишь оценки размерности всех аттракторов сверху степенью числа Рейнольдса (результаты Ю. С. Ильяшенко, М. И. Вишика и А. В. Бабина).

1990

1990-1. Пусть $A\colon (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ — росток голоморфного в окрестности 0 конечнократного отображения, X и Y — проходящие через 0 комплексные прямые (или голоморфные кривые), μ — кратность пересечения. Ограничена ли сверху экспонентой n кратность $\mu(A^nX, Y)$? *Предполагается, что все кратности* $\mu(A^nX, Y)$ *конечны.*

1990-2. Перевести классификацию омбилических точек на язык симплектической топологии лагранжевых особенностей (возможно, оптических) и сформулировать хотя бы гипотезы об их топологической необходимости.

1990-3. Каустика точки на выпуклой сфере S^2 (многообразие точек, сопряженных исходной, вдоль геодезических, выходящих из этой точки) естественно разбивается на компоненты связности (своего прообраза в касательном пространстве в исходной точке при отображении геодезической экспоненты): можно разделить первую каустику (образованную первыми сопряженными точками), вторую и т. д.

Можно ли разделить на бесконечное число связных компонент каустику точки на S^3 (или S^n)? *Например, при достаточно малом возмущении стандартной метрики сферы* S^3 *из первых* N *компонент вида двукратной сферы* S^2 *образуются, по-видимому, ровно* N *компонент связности, каждая из которых состоит из двух копий* S^2*, склеенных в нескольких (скольких?) конических точках (типа* D_4*). Но при данном, даже очень малом, возмущении не исключено, что, начиная с некоторого (очень большого)* N*, эти двусферические компоненты начнут соединяться друг с другом (я не знаю ни одного примера этого!) или даже будут образовывать бесконечные цепочки (тем более* *нет примеров!). Быть может, примеры легче получить не на S^3, а на S^n [когда пары сфер S^2 заменяются $n-1$ копией S^{n-1}; кстати, как именно их соединяют мостики D_4-точек (образующие на S^{n-1} множество коразмерности 2), не подсчитано даже в теории возмущений в рамках первого приближения; этот вопрос, по-видимому, близок к исследованию каустик (фокальных множеств) эллипсоидов в $\mathbb{R}^4$].*

1990-4. Гиперповерхность в $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ k-квазивыпукла, если ее вторая квадратичная форма в каждой точке имеет постоянную сигнатуру $\{k, l\}$, $k+l=n-1$ (множество $\{k, l\}$ не упорядочено: гиперповерхность не коориентирована и, возможно, не коориентируема!). При $k=0$ это обычная выпуклость.

Верно ли, что всякая (связная) k-квазивыпуклая вложенная в $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ замкнутая гиперповерхность не пересекает некоторые подпространства $\mathbb{R}\mathrm{P}^k$ и $\mathbb{R}\mathrm{P}^l$ (для $k=0$ это верно)?

1990-5. Какие топологические инварианты подмногообразия в евклидовом пространстве допускают оценку сверху через полную абсолютную кривизну (объем многообразия касательных плоскостей подмногообразия в расслоении грассманианов над евклидовым пространством)?

Сумма чисел Бетти оценивается, как и число Морса, а длины соотношений в фундаментальной группе — по-видимому, нет! По-видимому, множество допустимых гомотопических типов при фиксированной границе полной кривизны бесконечно [при каких (ко)размерностях подмногообразия и пространства?].

1990-6. Доказать перемешивание в типичной гамильтоновой системе на торе с псевдопериодическим гамильтонианом $ap+bq+$ (периодическая функция), имеющим критические точки. *Решено К. М. Ханиным – Я. Г. Синаем.*

1990-7. Рассмотрим семейство аналитических диффеоморфизмов окружности $x \mapsto x+a+bf(x)$, функция f периодическая. Ограничена ли (равномерно по a) кратность периодических точек, рождающихся при бесконечно малых b?

1990-8. Две проводящие поверхности (k-мерные) с разностью потенциалов 1 сближаются (в $\mathbb{R}^n$) до расстояния ε (распределение заряда электростатическое). Исследовать асимптотику силы их притяжения в терминах особенностей их касания при $\varepsilon = 0$ (*задача А. Д. Сахарова — для пары цилиндров в* $\mathbb{R}^3$).

1990-9. Придать точный смысл утверждению (М. Берри), что асимптотики осциллирующих интегралов, после вычета всех степенных по длине волны членов, имеют экспоненциально малые «скачки» универсальной формы erf.

1990-10. Придать точный смысл утверждению (В. В. Фока), что асимптотики медленно затухающих собственных функций задачи о малой диффузии в потенциальной динамической системе с несколькими аттракторами $[u_t + (uv)_x = \varepsilon \Delta u,\ v = \nabla U]$ на границе притяжения аттракторов имеют «скачки» универсальной формы erf.

1990-11. Придать точный смысл утверждению (А. Д. Сахарова), что среднее число вершин кусков, на которые плоская область делится большим числом прямых, равно 4. Обобщить на многомерный случай. *Согласно Ф. Аикарди, среднее число граней любой размерности у кусков в* $\mathbb{R}^n$ *такое же, как у n-мерного куба. Но строгое вероятностное доказательство, кажется, отсутствует.*

1990-12. Рассмотрим многообразие неотрицательных функций на многообразии M. Исследовать особенности границы этого многообразия (стратификацию, стабилизацию, бифуркационные диаграммы, гомологические свойства стратификации, восстановление M). *Общая точка границы — функция с одним морсовским нулевым минимумом. Многообразие таких функций расслоенно над M со стягиваемым слоем.*

1990-13. Исследовать особенности границы многообразия контактных структур на (трехмерном?) многообразии и границы многообразия контактных форм для данной структуры.

1990-14. «Инвариант Хопфа» $\int \alpha \wedge d\alpha$ или $\int \alpha \wedge (d\alpha)^n$ на контактном многообразии не требует условий $H^2 = 0$ или $\pi_2 = 0$. Поэтому на контактном многообразии можно пытаться определять комплекс типа Морса–Флоера и в неодносвязном, и в многомерном случае — надеясь, однако, извлечь лишь инвариант контактной структуры.

1990-15. Нет ли для сигнатуры слоя Милнора функции в $\mathbb{C}^3$ формулы в виде интеграла по трехмерному узлу особенности? Нельзя ли «перетащить» p_1 на это трехмерное многообразие (возможно, используя его контактную структуру)?

1990-16. Какие из инвариантов узлов могут быть «размазаны» до инвариантов бездивергентных векторных полей (вероятно, лежандровых на контактном многообразии)? Можно ли вычислить «зацепление» размазанных лежандровых подмногообразий большей размерности?

1990-17. Пусть $f\colon M^n \to S^n$ — гладкое отображение замкнутого многообразия в единичную сферу в $\mathbb{R}^{n+1}$, и пусть τ — элемент объема на M. При каких условиях существует такая иммерсия $i\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, что $f = g \circ i$, где g — гауссово отображение, и что τ совпадает с элементом объема римановой метрики на M, индуцированной (посредством иммерсии i) евклидовой метрикой на $\mathbb{R}^{n+1}$?

1990-18. Найти группу $\pi_2(G_6) = \pi_2(G_8)$, где G_n — пространство вещественных многочленов $x^n + a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$, у которых нет вещественных корней кратности выше 2.

1990-19. Пусть X — один из типов критических точек голоморфных функций, образующий множество коразмерности k в пространстве функций k переменных. *Точкой перегиба типа* X гиперповерхности в проективном пространстве назовем точку, в которой пара (гиперповерхность, ее касательная гиперплоскость) диффеоморфна паре (график функции, его касательная гиперплоскость) в критической точке типа X. Пусть также Y — тип критических точек функций $k+1$ переменной. Найти число перегибов типа X на гиперповерхности уровня общей функции типа Y ($k+1$ переменной), «исчезающих» (т. е. сливающихся) в критической точке.

1990-20. Пусть f — росток C^∞-отображения вещественного пространства на себя в конечнократной неподвижной точке. Предположим, что эта точка остается конечнократной для всех итераций f^n отображения f. Верно ли, что кратность такой неподвижной точки для итерации f^n не превосходит некоторой экспоненты ae^{cn}?

1990-21. Верно ли, что число изолированных циклов периодов $< T$ аналитического векторного поля на компактном многообразии не превосходит некоторой экспоненты ae^{cT}?

1990-22. Описать окрестности римановой сферы в голоморфных поверхностях с положительными индексами самопересечения.

1990-23. Алгебраическим *соответствием* алгебраической кривой с собой называется алгебраическая кривая в декартовом произведении исходной кривой на себя. *Дискретные инварианты* такого соответствия — это род исходной кривой, род соответствия и «бистепень» соответствия (т. е. чи́сла пересечений соответствия с сомножителями). Предположим, что в вещественной области соответствие представляет собой график диффеоморфизма окружности. Верно ли, что число изолированных циклов этого диффеоморфизма оценивается сверху константой, зависящей только от перечисленных дискретных инвариантов?

1990-24. Как велико может быть число изолированных нулей вещественного абелева интеграла

$$I(h) = \oint_{\gamma_h} (P\,dx + Q\,dy),$$

где γ_h — замкнутая компонента линии уровня $\{(x,y) \mid H(x,y) = h\}$, если P, Q и H — многочлены заданных степеней?

1990-25. Пусть g — натуральное число $\geqslant 2$, а $U(x)$ — фиксированный многочлен степени $2g+2$. Рассмотрим семейство гиперэллиптических интегралов первого рода

$$I(h) = \oint_{\gamma_h} \frac{P(x)}{y}\,dx,$$

где γ_h — замкнутая компонента линии уровня $\{(x,y) \mid y^2 + U(x) = h\}$, а $P(x)$ — произвольный многочлен степени не выше g. Является ли это семейство интегралов *чебышевским* (т.е. верно ли, что для любого P число изолированных нулей функции I не превосходит $g-1$)?

1990-26. *Полный флаг* в $\mathbb{R}^n$ состоит из линейных подпространств

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{R}^n$$

всех размерностей. Два флага называются *трансверсальными*, если составляющие их подпространства дополнительных размерностей трансверсальны. Множество флагов, нетрансверсальных данному, называется *шлейфом* этого флага. Найти число связных компонент, на которые шлейф флага разбивает окрестность последнего.

1990-27. Овалоид в $\mathbb{R}^n$ (замкнутая гиперповерхность, ограничивающая выпуклое тело) называется *алгебраически интегрируемым*, если объем, отсекаемый от этого овалоида гиперплоскостью, является алгебраической функцией гиперплоскости. Существуют ли в $\mathbb{R}^n$ при *нечетном* n алгебраически интегрируемые гладкие овалоиды, отличные от эллипсоидов?

1990-28. Со времен Пуанкаре под «неинтегрирусмой динамической системой» обычно понимают динамическую систему, не имеющую аналитических первых интегралов. Однако можно предложить и ряд других возможных значений термина «неинтегрируемость», например:

1) отсутствие инвариантных гиперповерхностей (главных идеалов),

2) отсутствие инвариантных замкнутых 1-форм (многозначных первых интегралов),

3) отсутствие инвариантных распределений касательных подпространств (инвариантных модулей Пфаффа),

4) отсутствие инвариантных слоений (инвариантных вполне интегрируемых систем Пфаффа).

Рассмотрим динамическую систему с дискретным временем (диффеоморфизм компактного многообразия) и объект одного из типов, упомянутых выше (функцию, идеал, замкнутую 1-форму, …). Образы этого объекта при итерациях диффеоморфизма могут составить конечное множество (если они периодически повторяются) или бесконечную совокупность, и могут порождать конечномерное или бесконечномерное пространство. Эти свойства отражают «степень хаотичности» динамической системы. Доказать неинтегрируемость — в смысле каждого из четырех приведенных выше определений — всех динамических систем из некоторого открытого множества в пространстве динамических систем на многообразиях достаточно высокой размерности.

1991

1991-1. Рассмотрим поле скоростей вращения шара вокруг оси. Можно ли сохраняющим объемы диффеоморфизмом шара в себя уменьшить энергию этого поля до любого значения? *Гипотеза А. Д. Сахарова* (1973): *можно для этого поля, нельзя — если есть хотя бы одна заузленная траектория или зацепленная пара траекторий.*

1991-2. Последовательность Бернулли–Эйлера (1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, 1385, …) дает числа топологически различных морсификаций особенностей A_n (т. е. числа компонент связности дополнений к их бифуркационным диаграммам). Что является неформальной комплексификацией этой теории? *Неформальная комплексификация* π_0 *— это* π_1. *Поэтому ответ, по-видимому, — накрытия Ляшко–Лойенги.*

1991-3. Рассмотрим возвратную последовательность степени n (например, 3):

$$x_{m+n} = a_1 x_{m+n-1} + \dots + a_n x_m \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Предположим, что число нулей среди x_i конечно (в этом случае последовательность называется «нерезонансной»). Сколько их тогда может быть? Ограничено ли их число при данном n?

1991-4. Исследовать особенности многообразия нормальных операторов.

1991-5. Исследовать особенности экспоненциальных отображений алгебр Ли (хотя бы алгебры матриц) в группу (стратификация многообразия особенностей и не покрытой части группы, стабилизация, локальные и глобальные гомотопические и гомологические группы дополнения к не покрытому множеству).

1991-6. Обладают ли раскрытые зонтики M-свойством Петровского (равна ли сумма чисел Бетти дополнения в вещественном случае таковой в комплексном случае)?

1991-7. Обладает ли M-свойством Петровского многообразие особых многочленов степени n от двух переменных? *Особые = имеющие менее* $(n-1)^2$ *различных критических значений.*

1991-8. Рассмотрим линейный оператор $A\colon \mathbb{C}^m \hookleftarrow$ и две плоскости X и Y дополнительных размерностей. Описать явно условия, при которых существует бесконечное число целых n таких, что $(A^nX)\cap Y$ имеет ненулевую размерность.

1991-9. Построить теорию связностей с особенностями. *Данную связность деформировать (в смысле какой-то эквивалентности) до связности почти всюду плоской и лишь на некотором особом подмногообразии сосредоточить всю кривизну. Затем извлекать инварианты из комбинаторики этих особенностей (и, возможно, «вычетов» связности на них).*

1991-10. Верно ли, что (гладкая) псевдопериодическая кривая в $\mathbb{R}^3$ имеет лишь одну неограниченную компоненту связности? *Отрицательно решено Д. А. Пановым.*

Псевдопериодическая кривая задается как прообраз точки при псевдопериодическом отображении $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f =$ (*линейное*) $+$ $+$ ($\mathbb{Z}^3$-*периодическое*), *причем выполнены условия несоизмеримости* (*почти всегда выполненные*): $\ker$(*линейное*) $= \mathbb{R}$, $\ker$(*линейное*) $\cap$ $\cap\, \mathbb{Z}^3 = \{0\}$.

1991-11. Рассмотрим выпуклую оболочку множества целых точек в пирамиде $z > ax + by$, $x > 0$, $y > 0$ (a, b — общие положительные). Исследовать асимптотику полиэдральной поверхности, ограничивающей эту выпуклую оболочку (например, среднее число ребер в вершине или на грани, среднее число целых точек на ребре; вероятность того, что случайная грань — треугольник, четырехугольник, …).

Обобщить распределение Гаусса элементов цепной дроби, перенеся его на трехгранные (*общие?*) *пирамиды в содержащем* $\mathbb{Z}^3$ *пространстве* $\mathbb{R}^3$. *Доказать многомерное обобщение теоремы Лагранжа о периодичности цепных дробей в этой ситуации: топологическая периодичность имеет место, если и только если плоскости — собственные для сохраняющего решетку оператора. Пример двумерного случая показывает, что границу выпуклой оболочки следует раскрасить* [*цвета соответствуют аффинным* $\mathrm{SL}(\mathbb{Z})$-*типам звезд вершин или обобщенных* r-*звезд, содержащих вершины, до которых из данной можно добраться не более чем* r *ребрами*]. *В двумерном случае* 1-*звезды определяют целочисленные углы граничной ломаной, которые, вместе с целочисленными длинами ребер, и составляют элементы цепной дроби.*

1991-12. Рассмотрим расслоения, слоями которых являются поверхности: расслоение Милнора для особенности A_n функции от двух переменных или тавтологическое расслоение над пространством модулей кривых данного топологического типа. Фундаментальная группа базы представлена автоморфизмами гомологий слоя (монодромия). Можно ли ее представить прямо в группу диффеоморфизмов (а не их классов по изотопиям)? Аналогичный вопрос — для старших размерностей и для симплектоморфизмов.

Для A_1 *ответ для симплектоморфизмов во всех размерностях положителен: существует симплектическое «скручивание Дена». Для* A_2 *в случае кривых тоже есть явная конструкция. Согласно В. В. Фоку, для особенностей кривых* $A_{\geqslant 4}$ *представления в гомеоморфизмы слоя не существует.*

1991-13. Исследовать топологические свойства многообразия лежандровых кривых (иммерсированных, вложенных), не пересекающих данный лежандров узел (найти фундаментальную группу и когомологии).

Согласно А. Б. Гивенталю, пространство всех лежандровых подмногообразий аналогично лагранжеву грассманиану, а подмногообразие тех, которые пересекают данное — шлейфу лагранжевой плоскости (образованному пересекающими ее нетрансверсально лагранжевыми плоскостями).

1991-14. (С. П. Новиков) Подмногообразие евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ называется $\mathbb{Z}^r$*-периодическим*, если оно инвариантно относительно сдвигов на векторы из некоторой целочисленной подрешетки $\mathbb{Z}^r \subset \mathbb{R}^n$. Рассмотрим общее иррациональное (аффинное) плоское сечение $\mathbb{Z}^3$-периодической поверхности (*поверхности Ферми*) в $\mathbb{R}^3$. Верно ли, что каждая неограниченная компонента этой кривой лежит в R-окрестности (с конечным $R > 0$) некоторой прямой?

1992

1992-1. (Б. Тесье) Рассмотрим функцию в $\mathbb{R}^n$ с критической точкой индекса нуль. Можно ли, изменив функцию только в сколь угодно малой окрестности этой точки, ликвидировать особую точку?

Пусть критическая точка индекса нуль конечнократна. Обязательно ли среди функций версальной деформации исходной функции есть функция без критических точек?

1992-2. Исследовать естественное действие группы кос на многообразии полных флагов и на пространствах их кокасательных расслоений, возникающее из коприсоединенного представления группы $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Построить теорию монодромии и вариации неизолированных особенностей, учитывающую (вместо неподвижности монодромии на краю слоя Милнора) башню граничных условий вблизи стратов разных размерностей, пересекающих границу шара с центром в изучаемой точке.

Получающаяся теория должна быть применима к отображению, сопоставляющему матрице ее характеристический многочлен. Она *должна обобщать описание Брискорна–Гротендика простых особенностей поверхностей A, D, E на случай не квазирегулярных элементов алгебры Ли (например, теория должна быть применима к семейству четырехмерных пересечений общих орбит с локальной трансверсалью к соответствующей необщей орбите).*

1992-3. Исследовать аналитическое продолжение эллиптических кривых, вложенных в пространство орбит голоморфного отображения комплексной кривой в себя. Какие особенности имеет граница продолжимости? Как велика эта граница (и соответствующая риманова поверхность)? *Например, для отображений $z \mapsto z + \omega + \varepsilon \sin z$ или $z \mapsto z + \omega + \varepsilon e^{iz}$, где $z \in \mathbb{C} \bmod 2\pi$, следует рассмотреть продолжение по параметрам ω и ε при $\varepsilon = 0$, $\operatorname{Im} \omega \neq 0$ [речь идет о кривой $\mathbb{C}/(2\pi\mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z})$].*

1992-4. Нарисовать дискриминант семейства нечетных многочленов $x^7 + ax^5 + bx^3 + cx$. Исследовать топологические свойства этих дискриминантов в $\mathbb{R}$- и $\mathbb{C}$-случаях: фундаментальная группа, число компонент дополнения, стабилизация, когомологии, ...

1992-5. Рассмотрим в полугруппе ростков голоморфных отображений (или формальных рядов) $(\mathbb{C}, 0)$ в себя $[(\mathbb{C}^N, 0)$ в себя$]$ несколько элементов $a_1, \ldots, a_k$ (например, для $k = 2$). Составим всевозможные слова s длины n из букв a_i. Предположим, что каждое уравнение $s(x) = x$ имеет в нуле корень конечной кратности $\mu(s)$. Рассмотрим максимум $M(n)$ этой кратности по всем (нетривиальным) словам s длины n. Может ли функция $M(n)$ при подходящем выборе a_i расти при $n \to \infty$ быстрее любой наперед заданной функции $A(n)$ (хотя бы вдоль некоторой подпоследовательности значений n)?

А может быть, для аналитических a_i всегда $M(n) < Cn$ с некоторой (зависящей от a_i) константой C, или $M(n) < Ce^{\lambda n}$? Аналогичные вопросы естественно поставить и для инфинитезимальных отображений, т. е. для ростков векторных полей в точке. В этом случае слова естественно составлять из кратных скобок Пуассона данных полей (либо даже из их сумм и разностей) и оценивать порядок нуля полученного поля.

Все эти задачи, нетривиальные уже на прямой ($N = 1$), *возникают при исследовании бифуркаций предельных циклов в связи с вопросом* 16*-й проблемы Гильберта об оценке их числа.*

1992-6. Слой Милнора (скажем, простой особенности) имеет естественную симплектическую структуру (происходящую из коприсоединенного представления). Исчезающие циклы c_i лагранжевы. Можно ли реализовать коисчезающие циклы ($\mathrm{var}^{-1} c_i \in H^*$) в виде лагранжевых подмногообразий слоя Милнора, края которых лежандровы в естественной контактной структуре узла особенности? Можно ли описать матрицу пересечений слоя Милнора (или даже вариацию) в терминах полученного лежандрова зацепления?

1992-7. Написать явно аналитическое (полиномиальное? тригонометрически-полиномиальное?) векторное поле без особых точек в $\mathbb{R}^5$, многообразие траекторий которого гомеоморфно, но не диффеоморфно стандартному четырехмерному пространству $\mathbb{R}^4$. *Такое многообразие называется «фальшивым»* (*англ.* “*fake*”, *франц.* “*faux*”) *пространством* $\mathbb{R}^4$.

1992-8. Двойной факториал появляется как ответ в задаче о классификации симплектических флагов и в задаче о перечислении диаграмм Васильева в теории узлов. Нет ли прямого отображения, сопоставляющего диаграмме или узлу симплектический флаг? *Естественная симплектическая структура на многообразии узлов* (*или даже иммерсий с двойными точками*) *имеется* (*Ж.-Л. Брылинский*): *реализацию узла можно интерпретировать как точку вырожденной орбиты коприсоединенного представления гидродинамической группы* $\mathrm{SDiff}\,\mathbb{R}^3$ (*обобщенная* 1*-форма по модулю точных*).

1992-9. Не существует ли у теории извращенных пучков Горески – Мак-Фёрсона распределенного варианта, в котором ограничения накладывались бы на ранги цепей по отношению к симплектической (контактной) структуре (или просто к распределению) всюду, а не только в точках стратификации?

Легко придумать много определений, скажем, для кривых или поверхностей в симплектическом или контактном пространстве (*приводящих скорее к кобордизмам, чем к гомологиям, но можно постараться сформулировать условия и в особых точках*). *Но вариантов так много, что нужен руководящий принцип для отбора подходящих определений.*

1992-10. Вычислить пространства модулей ростков гиперкэлеровых структур — будет ли ряд Пуанкаре почти всегда (исключая пространство ростков коразмерности бесконечность) рациональной функцией?

1992-11. Рассмотрим уравнение Навье–Стокса (например, на двумерном торе) с внешней силой, пропорциональной вязкости (модель Колмогорова). Верно ли, что при стремлении вязкости к 0 (т. е. при увеличении числа Рейнольдса) появятся аттракторы растущей с числом Рейнольдса размерности (не содержащие меньших аттракторов)?

Верно ли, что, более того, минимум из размерностей всех аттракторов неограниченно растет с ростом числа Рейнольдса?

А. Н. Колмогоров (1958) *предполагал, что ответ на первый вопрос положителен, но сомневался в положительности ответа на второй вопрос из-за экспериментов по затягиванию потери устойчивости.*

1992-12. Доказать экспоненциальные оценки сверху с вероятностью 1 топологических инвариантов пересечений $(A^n X) \cap Y$ в случае, когда A — не диффеоморфизм, как в заметке Arnol′d V. I. Dynamics of complexity of intersections. *Bol. Soc. Brasil. Mat.* (*N. S.*), 1990, **21**(1), 1–10 [*перевод на русский язык в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 489–499], а лишь гладкое отображение.

1992-13. Доказать экспоненциальные оценки сверху с вероятностью 1 для числа периодических траекторий периода n типичного диффеоморфизма (или гладкого отображения в себя).

1992-14. Для всякой ли возрастающей последовательности натуральных чисел $a_n \to \infty$ существует полиномиальное векторное поле в $\mathbb{R}^m$, направленное внутрь сфер $\{|\mathbf{x}| = r > 1\}$ и имеющее более чем a_{n_i} периодических траекторий с периодами $\leqslant n_i$ для некоторой возрастающей последовательности номеров $n_i \to \infty$ (при условии, что все периодические траектории невырождены)?

1992-15. Насколько велико может быть множество эллиптических кривых в пространстве орбит полиномиального векторного поля? Полиномиального отображения? Алгебраического соответствия с фиксированными дискретными инвариантами (набором родов или степеней)?

1993

1993-1. Перенести теорию окрестностей эллиптических кривых в голоморфных поверхностях на случай псевдоголоморфных поверхностей (построить теорию нормальных форм, резонансов, бифуркаций, расходимости рядов, ...).

1993-2. (Г. Мур (G. Moore)) Существует ли связь между инвариантами $J^{\pm}$, St плоских кривых и многочленами от площадей компонент дополнения к кривой и их экспонент, возникающими в теории двойных асимптотик мультипликативных интегралов по петлям Вильсона (В. А. Казаков, Ю. М. Макеенко, ...)? *Решено М. Б. Поляком в* 1997 *г.*

1993-3. Исследовать поверхность смены четырех вершин на шесть в общих семействах кривых $f_{a,b}(x, y) = c$ на евклидовой плоскости с параметрами a, b, c, где при $a = b = 0$ функция f имеет критическую точку минимума c с симметричным вторым дифференциалом $K(dx^2 + dy^2)$.

Предполагаемый ответ: «блюдечко» с горизонтальным сечением в виде шестивершинной гипоциклоиды и с параболическими вертикальными сечениями, проходящими через ось. Но, скорее всего, имеются функциональные модули.

1993-4. Исследовать исчезающие уплощения в общих семействах кривых в $\mathbb{C}^n$, заданных как прообразы общего отображения $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$.

Найти числа исчезающих уплощений, бифуркационные диаграммы и т. д.

Разумеется, нормальная форма отображения f *не дает еще сама по себе ответа: нужно подвергнуть прообраз общему диффеоморфизму. Например, для* $n = 2$ *нормальная форма* $f = xy$ *не дает точек уплощения на кривой* $xy = c \neq 0$. *Правильный (плюккеровский) ответ — 6 исчезающих точек перегиба — дает лишь эквивалентное отображение* $f = x^2 - y^2 - y^3$.

1993-5. Найти все системы весов мультипликативных образующих коммутативной $\mathbb{N}$-градуированной $\mathbb{C}$-алгебры с простейшим рядом Пуанкаре $1 + t + t^2 + \cdots$, для которых классификация таких алгебр а) относительно изоморфизма алгебр, б) относительно изоморфизма градуированных алгебр проста (не имеет модулей).

Для трех образующих при любых весах $1 < u < v$ *число алгебр есть* $2(a_1 + a_2 + \cdots) + 1$, *где* $v/u = a_0 + 1/a_1 + \cdots$ *— цепная дробь. Для четырех образующих имеется пример Б. Штурмфельса не простой системы весов.*

1993-6. Дать числам Финтушеля–Стерна, связанным с числами Флоера квазиоднородных узлов гомологических 3-сфер, описания в терминах многогранников Ньютона (допускающие многомерное обобщение).

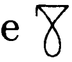
Согласно статье Fintushel R., Stern R. J. Integer graded instanton homology groups for homology three-spheres. *Topology*, 1992, **31**(3), 589–604, *многочлены Пуанкаре гомологий Флоера многообразий* $x^a + y^b + y^c = 0$, $|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = 1$ *имеют вид*

2 3 5	$t + t^5$	2 3 7	$t^{-1} + t^3$
2 3 11	$t + t^3 + t^5 + t^7$	2 3 13	$t^{-1} + t + t^3 + t^5$
2 3 17	$t + t^3 + 2t^5 + t^7 + t^9$	2 3 19	$2t^{-1} + t + 2t^3 + t^5$
2 3 23	$t + 2t^3 + 2t^5 + 2t^7 + t^{11}$	2 3 25	$2t^{-1} + 2t + 2t^3 + 2t^5$
2 3 29	$t + t^3 + 3t^5 + 2t^7 + 2t^9 + t^{11}$	2 3 31	$2t^{-1} + 2t + 3t^3 + 2t^5 + t^7$

1993-7. Если класс плоской кривой (орбита типичной иммерсии $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ под действием групп диффеоморфизмов $\mathbb{S}^1$ и $\mathbb{R}^2$, сохраняющих ориентацию) симметричен (инвариантен) по отношению к симметрии (отражения $\mathbb{S}^1$ или $\mathbb{R}^2$ или обоих), то в этом классе есть представитель, являющийся уже симметричной кривой (вместо диффеоморфизмов можно взять изометрии второго порядка, они переведут иммерсию в себя).

Аналогичное утверждение верно и для нетипичных кривых, т. е. для различных других орбит или стратов многообразия иммерсий. Но в других случаях (кажется, даже для кривых в $\mathbb{R}^3$*) бывают симметричные классы без симметричных представителей. Нет ли простого критерия, когда такие симметричные представители существуют (в задаче о классификациях отображений, иммерсий, вложений, ...)?*

1993-8. Исчезающие классы Черна. Наряду с исчезающими перегибами можно рассмотреть другие, не точечные страты особенностей двойственной гиперповерхности. Им соответствуют на исходной гиперповерхности (особые) подмногообразия разных размерностей, занумерованные типами критических точек функций. Ростки этих подмногообразий в особой точке задают в локальном кольце особенности свои инфинитезимальные аналоги. Вопрос состоит в том, чтобы дать им алгебраическое описание (например, в виде флага или колчана идеалов в локальном кольце) и сосчитать дискретные инварианты этих алгебраических объектов для каждой особенности исходной гиперповерхности.

1993-9. Можно ли соединить кривые  и  в классе фронтов лежандровых иммерсий в $ST^*\mathbb{R}^2$ с двумя (или — не более чем двумя) точками возврата?

1993-10. Рассмотрим две плоские иммерсированные кривые одного J^+-класса. Соединим их общим путем в пространстве иммерсий, вдоль которого никогда не происходит перестройки J^+ (т. е. сонаправленного самокасания). Рассмотрим минимальное число (других) перестроек на таком пути. Ограничено ли это число постоянной, зависящей только от сложности (числа двойных точек n) исходных двух кривых? Если да, то как растет эта функция от n? Может быть, она невычислима вследствие более быстрого роста, чем все вычислимые функции?

Является ли задача распознавания того, лежат ли две кривые в одной J^+-компоненте, алгоритмически разрешимой (*вероятно, нет*)? *Аналогичные вопросы есть для всех классификационных задач, рассматриваемых на семинаре, — например, для* St*-классов, для фронтов,* *для фронтов с фиксированным или ограниченным сверху числом точек возврата, и т. п.*

1993-11. Удовлетворяют ли периодические цепные дроби статистике Гаусса элементов? Например,

A) можно рассмотреть случайные матрицы из $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ или из $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ в большом шаре радиуса R, раскладывать их в цепные дроби и изучать

а) статистику элементов этих периодических дробей;

б) статистику длины периода.

Существует ли предел распределения при $R \to \infty$ и совпадает ли он с гауссовым? Верно ли, что он одинаков для любых подобно расширяющихся областей вместо шаров?

B) Можно также рассматривать случайные трехчлены $\lambda^2 + a\lambda + b$ (с вещественными корнями) в области $a^2 + b^2 \leqslant R^2$ в $\mathbb{Z}^2$ и исследовать статистику по ним (области тоже можно брать другие, например, $|a| \leqslant R$, $|b| \leqslant R$).

C) Можно даже начинать с рациональных дробей p/q, раскладывать их в цепные дроби и искать предел статистики для $p^2+q^2 \leqslant R^2$, $R \to \infty$; круги опять можно заменить другими областями. *Предположительно, ответ не зависит от формы области и во всех случаях такой же, как указывает инвариантная мера Гаусса эндоморфизма* $x \mapsto 1/x - [1/x]$ *интервала* $(0;1)$ *в себя.*

1993-12. Описать действие группы кос (и ее подгрупп, соответствующих различным неизолированным особенностям слоев) на гомологиях орбиты общего положения, т. е. многообразия T^*F_{n+1} (F_{n+1} — пространство полных флагов в $\mathbb{C}^{n+1}$), заданное при помощи181 коприсоединенного представления $A_n = \mathrm{SL}(n+1,\mathbb{C})$:

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{l}\text{многообразие } \mathbb{C}^{n^2+2n}\\ (n+1)\text{-матриц со следом } 0\end{array} \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[d, swap, "\begin{array}{l}\text{отображение}\\ \det(A-\lambda E)\end{array}"] & \begin{array}{l}\text{неособый слой} \simeq T^*F_{n+1} =\\ = \text{неособая орбита}\end{array} \arrow[d, "\text{расслоение}"] \\
\begin{array}{l}\text{характеристические}\\ \text{многочлены}\end{array} \arrow[r, phantom, "\supset"] & \begin{array}{l}\text{некритические значения} =\\ = \text{дополнение}\\ \text{к ласточкину хвосту}\end{array}
\end{tikzcd}$$

1993-13. Существует ли вообще плоская не обязательно симплектическая связность в расслоении Милнора хотя бы для A_2? Иначе говоря, можно ли выбрать на торе с дырой V скручивания Дена вдоль параллели и вдоль меридиана так, чтобы они удовлетворяли соотношению $aba = bab$ в группе $\operatorname{Diff} V$ [или лучше в группе $\operatorname{Diff}(V, \partial V)$, оставляющей край на месте поточечно], а не в $\pi_0(\operatorname{Diff} V)$?

1993-14. В работе Cohen P.-B., Wolfart J. Dessins de Grothendieck et variétés de Shimura. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1992, **315**(10), 1025–1028 появляются треугольники Лобачевского с углами $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$ и порожденные ими группы. Мы знаем, что из этих треугольников 14 особенно замечательны («зеркальная симметрия» физиков = «странная двойственность» чисел Габриэлова–Долгачева). Спрашивается, не выделяются ли чем-нибудь эти 14 треугольников и в арифметически-топологической теории Галуа–Гротендика–Шабата?

1993-15. В работе Mourtada F.-Z. Familles génériques à quatre paramètres de champs de vecteurs quadratiques dans le plan. Singularité à partie linéaire nulle. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1993, **316**(7), 673–678 (представленной R. Thom'ом почему-то в отдел УРЧП) указаны бифуркации фазовых портретов и в резюме утверждается, что приведены все портреты в областях дополнения к бифуркационной диаграмме, но в тексте в конце сказано, что предельные циклы не исследованы. Необходимо в контексте этой статьи довести до конца исследование предельных циклов (определить хотя бы их число!) и описать их бифуркации.

1993-16. Недавно Пьер Лионс получил премию за исследование влияния малой вязкости на уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана; в анонсе премии сказано, что он и придумал вязкие решения и доказал сходимость к ударным волнам в подходящем смысле.

Насколько я помню, в этом направлении еще до Лионса были работы (в т. ч. С. Н. Кружкова). Каково соотношение этих работ и результатов Лионса? Что нового внес Лионс?

1993-17. Имеется ли в популярной литературе следующий факт: число сочетаний C_i^x совпадает по модулю p^p (p нечетное простое) со значением многочлена степени x от i *с целыми при* $x < p$ коэффициентами?

1993-18. В *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1993, **316**(5), 513–518 появилась странная статья Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Rouchon P. Défaut d'un système non linéaire et commande haute fréquence об использовании для управления быстроосциллирующих воздействий. Авторы критикуют понятия полной управляемости и т. п. и предлагают что-то взамен. В этой работе необходимо тщательно разобраться, так как авторы привлекают дифференциальную алгебру, которая никак здесь не может быть по существу. Получили ли они новые результаты в рассмотренных задачах о перевернутом обычном и двойном маятнике с быстро колеблющейся точкой подвеса?

1993-19. В *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1993, **316**(6), 573–577 имеется статья Pollack R., Roy M.-F. On the number of cells defined by a set of polynomials, где для n переменных и s уравнений степени d в $\mathbb{R}^n$ получена оценка числа компонент множеств, определенных s уравнениями *или* неравенствами при любом выборе знаков: $\leqslant O\big((sd/n)^n\big)$. Единственная ссылка на Warren H. E. Lower bounds for approximation by nonlinear manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1968, **133**, 167–178.

Следует ли этот результат из теории Петровского–Олейник? Что мы знаем хотя бы в случае полного пересечения: сколько компонент, когда неравенств нет? Или для дополнения к объединению s гиперповерхностей — чтó есть гиперповерхность степени sd? Откуда здесь $(sd/n)^n$? В стандартных неравенствах для гиперповерхности степени $sd = D$ скорее можно ожидать D^n/n. Например, для $d = 1$ и $n = 2$ число областей $\sim s^2/2$, а не $s^2/4$; интегрируя, вроде бы получаем в $\mathbb{R}^n$ при $d = 1$, грубо говоря, $s^n/n!$, точнее, $e^n(s/n)^n + \cdots \gg s^n/n^n$, что противоречит результату статьи. Может быть, O у авторов при фиксированном n? Тогда зачем всё n^n?

1993-20. Можно ли посчитать инвариант Кассона узлов особенностей (хотя бы брискорновских $x^a + y^b + z^c$, для которых узел не есть гомологическая сфера) — определение см. в статье Lescop C. Sur l'invariant de Casson–Walker: formule de chirurgie globale et généralisation aux variétés de dimension 3 fermées orientées. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1992, **315**(4), 437–440, подобно тому, как это сделано для гомологических сфер у Р. Финтушеля – Р. Стерна? Получится ли сигнатура слоя Милнора?

1993-21. В статье Dax J.-P. Points singuliers normaux, points singuliers normaux simples et modèles d'élimination. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1992, **315**(3), 315–319 получена классификация отображений $X \to Y$, переводящих $A \subset X$ внутрь $B \subset Y$. Что это такое — диаграммы отображений или совсем новая задача?

1993-22. В работе Pecker D. Courbes gauches ayant beaucoup de points multiples réels. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1992, **315**(5), 561–565 построены уникурсальные пространственные кривые с максимальным числом двойных точек, которые оказываются *все вещественными* — в задаче о *пространственных* кривых, в отличие от плоских, *всё* реализуется в вещественной области (например, любой набор двойных точек и точек возврата?). Нет ли здесь общего явления: для отображений в многомерное пространство особенности можно «загонять» в вещественную область (т. е. реализовывать в $\mathbb{R}$-точках для $\mathbb{R}$-отображения)?

1993-23. Недавно И. Экеланд с соавторами доказали, что на каждой *центрально-симметричной* (квадратично) выпуклой замкнутой поверхности в $\mathbb{R}^n$ имеется *эллиптическая* (вероятно, не гиперболическая и не жорданова?) замкнутая геодезическая [Dell'Antonio G., D'Onofrio B., Ekeland I. Les systèmes hamiltoniens convexes et pairs ne sont pas ergodiques en général. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1992, **315**(13), 1413–1415].

Нет ли примера *несимметричной* поверхности без *эллиптических* (в том же смысле) замкнутых геодезических? Например, верно ли, что для любой замкнутой поверхности, близкой к сфере, имеется *эллиптическая* замкнутая геодезическая? Если поверхность близка к трехосному эллипсоиду, то это, *кажется*, следует из теоремы Пуанкаре–Биркгофа (но я *не* проверял, следует ли, — положительный индекс имеют также точки с собственными числами < 0).

Но как быть, если поверхность близка к сфере? Наверное, можно усреднить по большим кругам и опять применить теорему Пуанкаре — сделал ли это кто-нибудь? Метрику удобно задавать функцией следующего вида: $f \cdot$ стандартная метрика.

Спрашивается, как будет в усредненном движении двигаться центр мгновенного большого круга, аппроксимирующего траекторию? При этом должна получиться, вероятно, гамильтонова система на сфере, определенная в терминах f, а функция Гамильтона должна быть связана с интегралом f по большим кругам — какие функции при этом интегрировании возникают?

1993-24. Исследовать двойственность «каустика — страт Максвелла».

1993-25. Недавно Ю. Мозер нашел новый вариант теорем типа КАМ: рассматривается комплексный тор $\mathbb{C}^n/(\Gamma \approx \mathbb{Z}^{2n})$, скажем, при $n = 2$, со слоением $\omega_1\,dz_1 + \omega_2\,dz_2 = 0$, вообще говоря, нерезонансным. Комплексная структура возмущается до *квазикомплексной.*

Вопрос: что при этом происходит с голоморфными слоениями? Ответ: для направлений полной лебеговой меры они выживают (в старших размерностях слоев, что не исследовано, слоение тоже квазиголоморфное, т. е. касательная плоскость инвариантна относительно квазикомплексной структуры $J\colon T_xM \hookleftarrow$, $J^2 = -E$; но одномерные слои получатся тогда *комплексные*, а не только квазикомплексные).

Вопрос: что произойдет с моей теорией бифуркаций эллиптических кривых на комплексных поверхностях, если поверхности *квазикомплексные*? Это обширная тема, так как нужно исследовать всё с самого начала — нормальные формы нормальных расслоений, окрестности с положительными, нулевыми и отрицательными индексами самопересечения, резонансы, их материализацию, теорему Грауерта об отрицательных окрестностях и т. д.

1993-26. Изучить особенности многообразия нормальных матриц.

Еще одно отличное неисследованное многообразие — ряды Тейлора взаимно-однозначных отображений круга $|z| < 1$ на плоскость («проблема коэффициентов однолистных функций»): стратифицировать границу и разобраться в особенностях малой коразмерности в пространстве рядов.

1993-27. Вторая, третья и последующие группы кос: некоммутативные резольвенты. Это очень старая задача — но пора разобраться в ней.

Рассмотрим общую проекцию гиперповерхности Σ_0 в $\mathbb{C}^n$ на гиперплоскость $\mathbb{C}^{n-1}$ (росток в нуле). *Дискриминант* есть гиперповерхность Σ_1 в $\mathbb{C}^{n-1}$, над которой число прообразов меньше степени Σ_0 в 0. Мы получаем цепочку дискриминантов $\Sigma_i \subset \mathbb{C}^{n-i}$ проекций $p_i : \mathbb{C}^{n-i+1} \to \mathbb{C}^{n-i}$ и цепочку групп $\Gamma_i = \pi_1(\mathbb{C}^{n-i+1} \setminus \Sigma_{i-1}, b_i)$ (вблизи 0), где $b_i \in \mathbb{C}^{n-i+1}$. При этом $\Gamma_i = F_i/R_i$, здесь F_i — свободная группа, порожденная обходами вокруг Σ_{i-1} в слое $p_i^{-1}(p_i b_i)$, а R_i — нормальное замыкание подгруппы в F_i, порожденной произведениями $(A_\varphi f)f^{-1}$, где $f \in F_i$, а A_φ — действие на F_i группы F_{i+1} косами ($\varphi \in F_{i+1}$).

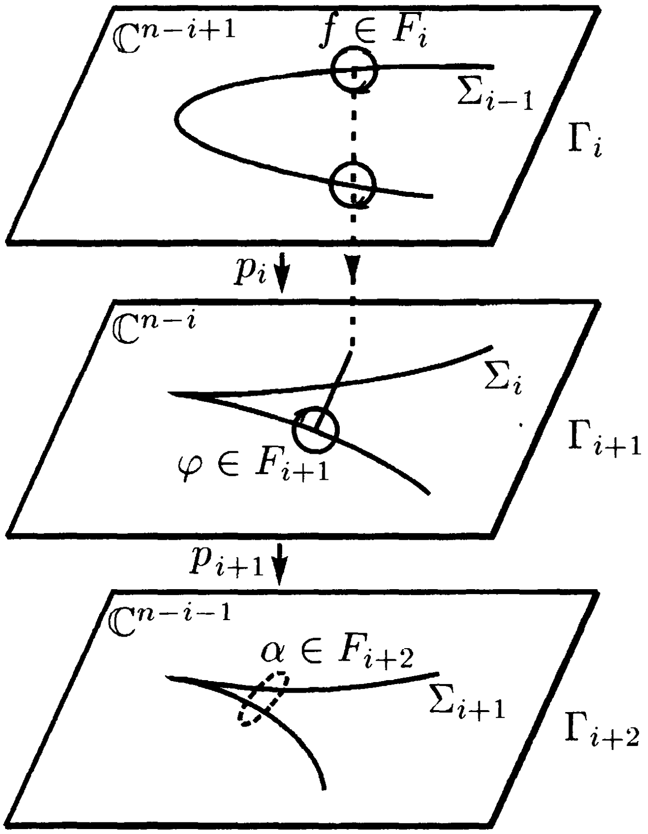


Рис. 1. Последовательность дискриминантов Σ_i и групп Γ_i

Ясно, что «образующие Γ_{i+1} (обозначаемые выше через φ) соответствуют соотношениям в Γ_i». Если же рассмотреть еще и группу Γ_{i+2}, то ее образующие α соответствуют соотношениям R_{i+1} в Γ_{i+1} и, следовательно, «соотношениям между соотношениями» в Γ_i.

Итак, соотношения (R_{i+1}) в Γ_{i+1} соответствуют образующим (F_{i+2}) группы Γ_{i+2}. Если $\alpha \in F_{i+2}$ — такая образующая, то A_α действует как коса на F_{i+1} и переводит φ в $A_\alpha\varphi$; элемент $\xi = (A_\alpha\varphi)\varphi^{-1} \in F_{i+1}$ действует теперь на F_i. Очевидна «лемма Пуанкаре $d^2 = 0$»:

$$A_\xi f \equiv f \quad \forall \xi = (A_\alpha\varphi)\varphi^{-1} \quad \forall f \in F_i.$$

Вопрос: насколько R_{i+1} меньше, чем подгруппа $\widehat{R}_{i+1}$ группы кос, действующей на F_{i+1}, определенная условием

$$\widehat{R}_{i+1} = \big\{\sigma \in \mathrm{Br}(F_{i+1}) \mid \forall\xi = (\sigma\varphi)\varphi^{-1} \in F_{i+1} \ \ \forall f \in F_i \ \ A_\xi f \equiv f\big\}?$$

Это — общий вопрос для любого ростка гиперповерхности в точке.

Теперь пусть Σ_0 — *ласточкин хвост* в $\mathbb{C}^{\mu=n}$ (его можно получить из $\Sigma_{-1} = \{x, \lambda \mid x^{\mu+1} + \lambda_1 x^{\mu-1} + \dots + \lambda_\mu = 0\}$ проектированием вдоль оси x в $\mathbb{C}^{\mu+1}$). Тогда $\Gamma_0 = \mathbb{Z}$ и $\Gamma_1 = \mathrm{Br}(\mu + 1)$, а $\Gamma_2 = F_2/R_2 \equiv \widehat{R}_2$.

Острый вопрос: верно ли, что $\Gamma_3 = F_3/R_3 \equiv \widehat{R}_3$? Или $\widehat{R}_3 \supset R_3$? Как описать Γ_3? Может быть, следует брать квазиоднородные проекции p_i, а не общие?

1993-28. Еще одна старая тема, которую пора напомнить: особенности в «геометрической теории УРЧП Картана». Предметом является система дифференциальных уравнений, т. е. подмногообразие пространства струй конечного порядка или — что то же — модуль следствий.

1993-29. Пусть в $\mathbb{R}^n$ дано векторное поле v с особой точкой и вещественные части собственных чисел соответствующей матрицы Якоби (не только в данной особой точке, но и *всюду*) отрицательны. Верно ли, что тогда бассейн притяжения этой особой точки — всё пространство $\mathbb{R}^n$?

Условие, быть может, будет выглядеть менее странно, если рассмотреть управляемую систему $\dot{x} = v(x) + u$, *тогда при любом фиксированном* u *неподвижная точка — аттрактор (с отрицательными показателями Ляпунова).*

1993-30. Сравнить исследования нормальных форм поверхностей Стокса, проводимые А. И. Нейштадтом и С. К. Ландо.

1993-31. М. Р. Эрман рассказал красивую конструкцию сохраняющего площадь диффеоморфизма диска с положительными показателями Ляпунова в целой области (см. ниже). Нельзя ли приспособить эту конструкцию для решения проблемы Сахарова о быстром идеальном динамо? Напомню, что совокупность объектов

$$\{A\colon B^3 \to B^3,\ \ H \text{ — поле дивергенции 0 на шаре } B^3,\ \ \det A_* \equiv 1\}$$

называется *быстрым идеальным динамо*, если $\iiint |A_*^n H|^2\,dx \geqslant Ce^{\lambda n}$, $\lambda > 0$.

Конструкция, сообщенная Эрманом: пусть $A\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ — отображение Аносова, скажем, $\left(\begin{smallmatrix}2&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$, а $\sigma\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ — голоморфная инволюция с 4 неподвижными точками [скажем, накрытие $w^2 = P_4(z)$ эллиптической кривой над S^2]; в $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 4 точки $(0,0)$, $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ остаются на месте при A^6 [так как $(0,0)$ остается на месте, а остальные точки переставляются]. Следовательно, A^6 действует на сфере (с 4 неподвижными точками) как система Аносова. Остается разрешить эти 4 точки.

1993-32. Многомерные цепные дроби и A-алгебры.

Недавно Д. Эйзенбад построил пример (см. ниже) A-алгебры над $\mathbb{C}$ с модулями (не «простой»). Напомню, что A-алгебра градуирована и имеет ряд Пуанкаре $1 + t + t^2 + \cdots$ пространства многочленов от одной переменной. Степени мультипликативных образующих определяются однозначно: $1 = u_0 < u_1 < u_2 < \cdots$ (u_i заполняет первую лакуну в степенях мономов от образующих меньших степеней).

Таким образом, можно составить диаграмму Юнга; например, из аномалии $\alpha_i = u_i - i$ составляется $1 = \alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots$. *Нет ли связи* между присутствием модулей в A-алгебрах с данной аномалией и в уплощениях?

Эйзенбад надеется *доказать* трансверсальность в точках Вейерштрасса.

Конечно, скорее всего, связи нет, но всё же — простота (отсутствие модулей) отбирает среди всех диаграмм Юнга простые, и интересно, каков список простых в этом смысле диаграмм Юнга? Может быть, стóит взглянуть и на бифуркационные диаграммы (хотя я не знаю, что это такое — ведь пространство A-алгебр нелинейное). Может быть, нужно рассматривать одномерные расширения готовой A_μ-алгебры (размерности μ над $\mathbb{C}$) — если есть модули у алгебры, то они проявятся где-то по дороге в первый раз в цепи расширений, *а пространство расширений менее особо (не исключено, что даже вообще неособо для одномерных расширений).*

Пример Эйзенбада. Образующие x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_6, y_7, y_8, x_{17} указанных степеней; соотношения: $x_ix_j = 0$, $x_iy_jy_k = 0$, $x_1y_i = x_2y_i = 0$, соотношения между y_i как между y^i (например, $y_6y_8 = y_7^2$), действие умножения x_3, x_4 и x_5 на y_i таково:

$$\begin{array}{lll} x_3y_7 = x_4y_6, & x_4y_8 = x_5y_7 = x_5y_8 = 0, & x_{17}y_i = 0. \\ x_3y_8 = x_5y_6, & x_4y_7 = ax_3y_8 = ax_5y_6, & \end{array}$$

Утверждается, что a — модуль. Действительно, если умножить образующую степени i на λ_i, то получаем:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{из } x_3y_7 = x_4y_6 & \text{следует } \lambda_3\lambda_7 = \lambda_4\lambda_6 \\ \text{из } y_6y_8 = y_7^2 & \text{следует } \lambda_6\lambda_8 = \lambda_7^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (\lambda_4\lambda_7 = \lambda_3\lambda_8) \Longrightarrow a \text{ — модуль!}$$

1993-33. Исследовать асимптотические свойства случайных целых плоскостей — должна ли получиться статистика, аналогичная статистике Гаусса цепных дробей?

1993-34. Промоделировать особенностями спектральную последовательность расслоения подобно тому, как комплекс Морса моделирует комплекс гомологий: сопоставить геометрические объекты дифференциалам и получить «неравенства Морса» — существование каких-то особенностей (и оценки снизу тех или иных характеристик этих особенностей) в терминах дифференциалов спектральной последовательности.

Конкретный вопрос: для расслоения

$$\begin{tikzcd} S^{2n+1} \arrow[d, "p"', "\mathbb{S}^1"] \\ \mathbb{C}\mathrm{P}^n \end{tikzcd}$$

и функции f общего положения на S^{2n+1} указать необходимую кратность μ критической точки ограничения на слой $p^{-1}(b)$ для самого плохого слоя: слово «необходимую» означает минимум по всем f общего положения.

1993-35. (С. П. Новиков) Рассмотрим циклическое накрытие компактного многообразия и общую псевдопериодическую гладкую морсовскую функцию f на накрывающем пространстве (дифференциал которой поднимается с исходного компактного многообразия). Обозначим через $+1$ действие группы $\mathbb{Z}$ на накрывающем пространстве и предположим, что $f(x+1) \equiv f(x)+1$. Пусть p и q — критические точки функции f индексов i и $i-1$ соответственно. Рассмотрим «инстантоны» (траектории поля $\operatorname{grad} f$), соединяющие точки p и $q-n$. Ограничено ли число таких инстантонов экспонентой n?

1993-36. Зафиксируем окрестность U гиперболической неподвижной точки 0 диффеоморфизма плоскости A. *Порядком* гомоклинической точки p ($A^m p \to 0$ при $m \to \pm\infty$) назовем число точек орбиты точки p, лежащих вне U:

$$\operatorname{ord}(p) := \#\{m \in \mathbb{Z} \mid A^m p \notin U\}.$$

Ограничено ли число гомоклинических точек данного порядка n экспонентой порядка?

1993-37. Связная гладкая гиперповерхность в вещественном проективном пространстве называется *локально гиперболической*, если ее вторая квадратичная форма всюду невырождена. Все ли замкнутые связные локально гиперболические невыпуклые поверхности в $\mathbb{RP}^3$ квазивыпуклы?

1993-38. Связно ли множество замкнутых связных локально гиперболических невыпуклых поверхностей в $\mathbb{RP}^3$? У любой ли такой поверхности существует выпуклое плоское сечение?

1993-39. Верно ли, что общая каустика, образованная r-ми сопряженными точками вдоль геодезических, выходящих из данной точки на сфере S^2, имеет по крайней мере четыре точки возврата для любой римановой метрики на S^2?

1993-40. Верно ли, что общая каустика, образованная r-ми сопряженными точками вдоль геодезических, выходящих из данной точки на сфере $\mathbb{S}^3$, имеет по крайней мере четыре особенности типа D_4 для любой римановой метрики на $\mathbb{S}^3$?

1993-41. Эта и последующие шесть задач посвящены критическим точкам и лагранжевым особенностям.

Рассмотрим общую выпуклую гладкую замкнутую кривую γ на $\mathbb{R}^2$ и прямые, нормальные к ней. Единичные векторы на этих прямых, определяющие ту же ориентацию прямых, что и внутренние нормали к γ, образуют лагранжево подмногообразие M пространства $T^*\mathbb{R}^2$ (мы отождествляем касательные и кокасательные векторы, используя евклидову метрику на плоскости). Сборки проекции этого лагранжева подмногообразия на плоскость — центры кривизны кривой γ в ее вершинах — являются особыми точками каустики Γ, образованной центрами кривизны кривой γ во всех ее точках.

Многообразие M диффеоморфно цилиндру. Единичные векторы, приложенные вне содержащего каустику большого диска, образуют два «воротника» (полуцилиндра) на M. Эти воротники проектируются на плоскость диффеоморфно, а средняя часть цилиндра между воротниками — с особенностями (множество критических значений — каустика Γ).

Можно ли заменить среднюю часть цилиндра M другим лагранжевым вложением с тем, чтобы результирующая проекция вложенного лагранжева цилиндра на плоскость не имела сборок (и совпадала с исходной проекцией на воротниках)?

1993-42. Ослабленный вариант предыдущей задачи: можно ли заменить среднюю часть цилиндра M лагранжевой *иммерсией* с тем, чтобы результирующая проекция *иммерсированного* лагранжева цилиндра на плоскость не имела сборок (и совпадала с исходной проекцией на воротниках)?

1993-43. Цилиндр M в задаче *1993-41 оптический*, т. е. лежит в гиперповерхности $p^2 = 1$.

Можно ли заменить этот цилиндр — с сохранением граничных воротников — *оптическим* иммерсированным (или вложенным) лагранжевым цилиндром, проекция которого на плоскость не имеет сборок?

1993-44. Топологические инварианты пространства морсовских функций на данном компактном многообразии (или пространства функций, критические точки которых не сложнее, чем особенности из некоторого фиксированного класса) являются интересными инвариантами гладкого многообразия; ср. статью Арнольд В. И. Пространства функций с умеренными особенностями. *Функц. анализ и его прилож.*, 1989, **23**(3), 1–10 [*перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 455–469].

Определяются ли гомотопические типы этих пространств функций топологическим типом исходного многообразия, или же они действительно зависят от гладкой структуры?

1993-45. Рассмотрим морсовскую функцию на связном компактном многообразии. С помощью подходящего диффеоморфизма можно перевести все критические точки этой функции в некоторый малый шар в многообразии. Ограничение нашей функции на окрестность границы этого шара определяет лагранжев (или лежандров) воротник — множество первых дифференциалов функции или ее 1-струи в точках сферического слоя.

Можно ли восстановить многообразие по его лагранжеву воротнику? Для каких пар многообразий M_1^n и M_2^n существуют функции $f_1\colon M_1^n \to \mathbb{R}$ и $f_2\colon M_2^n \to \mathbb{R}$, совпадающие на шарах, содержащих все критические точки?

1993-46. Рассмотрим семейство гладких функций как функцию на пространстве гладкого расслоения (с компактной базой и компактными слоями). Можно ли оценить снизу числа вырожденных критических точек (различных типов) ограничений функции на слои через топологию расслоения?

1993-47. Рассмотрим гладкую функцию в окрестности конечнократной критической точки 0. Предположим, что индекс соответствующего градиентного векторного поля в 0 равен нулю. Рассмотрим лагранжев воротник, определенный ограничением этой функции на окрестность сферы ∂B с центром в 0. Ограничивает ли этот воротник лагранжев диск (или другое лагранжево многообразие, вложенное в кокасательное расслоение шара B), не пересекающий нулевое сечение?

1993-48. (М. Б. Севрюк) Пусть гладкая инволюция $G\colon M \to M$ некоторого N-мерного многообразия M имеет инвариантный n-мерный тор $L \subset M$, $L \cong \mathbb{T}^n$, причем ограничение $G|_L$ сопряжено с преобразованием $\varphi \mapsto -\varphi$ (φ — угловая координата на $\mathbb{T}^n$) и, таким образом, имеет 2^n изолированных неподвижных точек. Каковы могут быть типы инволюции G в этих точках?

Если $a \in M$ — неподвижная точка инволюции G, то по определению тип инволюции G в этой точке есть $(p, N - p)$, если линейная часть G в точке a есть отражение относительно $(N - p)$-мерной плоскости. Если $(p_1, N - p_1), \ldots, (p_{2^n}, N - p_{2^n})$ — типы инволюции G в неподвижных точках $a_1, \ldots, a_{2^n}$ на торе L, то $n \leqslant p_i \leqslant N$ для всех i. Все ли наборы чисел p_i, удовлетворяющих этим неравенствам, реализуются?

1994

1994-1. Назовем *псевдофункцией* иммерсию $\mathbb{S}^1 \to S^2$, ограничивающую площадь в полсферы и гомотопную вложению экватора в классе таких иммерсий, для которых никакая меньшая всей кривой петля не ограничивает полсферы.

Доказать, что псевдофункция пересекает любой экватор. *Доказано А. Б. Гивенталем даже для лагранжевых $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ в симплектическом $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$.*

1994-2. Доказать, что число перегибов псевдофункции не меньше четырех. *Это верно для вложенных псевдофункций и неверно для некоторых иммерсий класса экватора, ограничивающих площадь в полсферы (при соединении такой кривой с экватором простейшей гомотопией возникает петля, ограничивающая полсферы).*

1994-3. Рассмотрим цилиндр $\mathbb{S}^1 \times I$. Иммерсия $\mathbb{S}^1$ в цилиндр называется 0-*псевдофункцией*, если она ограничивает площадь в полцилиндра и гомотопна вложению края вложенного диска в классе иммерсированных кривых, ограничивающих площадь в полцилиндра и не содержащих петель, ограничивающих такую площадь.

Доказать, что 0-псевдофункция пересекает экватор. Исследовать вопрос о существовании на ней четырех точек перегиба. *Кривую на цилиндре* $x^2+y^2=1$, $|z|<1$ *можно спроектировать на сферу* $x^2+y^2+z^2=1$ *либо из центра, либо (симплектоморфизм Архимеда) горизонтальными радиусами из точек вертикальной оси цилиндра. Первая проекция превращает в точки перегиба на сфере точки уплощения на цилиндре. Вторая — в точки двукратного касания с проекциями больших кругов. Для возмущений экватора цилиндра, ограничивающих с ним нулевую площадь, имеются* 4 *точки перегиба в обоих смыслах.*

1994-4. Если вложенная в S^2 кривая пересекает большой круг $2k$ раз, то у нее не менее $2k$ точек перегиба. Найти симплектическую (или контактную) формулировку этой геометрической теоремы и перенести ее на общие чебышевские системы.

1994-5. Кривая (иммерсированная окружность $\mathbb{S}^1$) в $\mathbb{R}^{2n}$ называется *выпуклой*, если никакая гиперплоскость не пересекает ее более, чем в $2n$ точках (считая кратности). Всякая ли выпуклая кривая в $\mathbb{R}^{2n}$ имеет выпуклую проекцию в $\mathbb{R}^{2n-2}$? Является проекцией выпуклой в $\mathbb{R}^{2n+2}$ кривой? *Аналогичный вопрос интересен и для проективных выпуклых кривых в* $\mathbb{RP}^m$ *с необязательно четным* m.

1994-6. Гладкие кривые в $\mathbb{R}^3$, близкие к плоским выпуклым кривым, имеют не менее четырех точек уплощения. Чтобы дать контактную формулировку этого утверждения (в духе лежандровой теории Морса–Чеканова), было бы полезно понять, до насколько больших деформаций сохраняются четыре точки уплощения. Достаточно ли, чтобы оставались тривиальными (незаузленно вложенными) в процессе деформации как исходная, так и двойственная кривая?

1994-7. Рассмотрим лежандровы коэффициенты самозацепления L_i лежандровой кривой в полнотории $ST^*\mathbb{R}^2$. Являются ли они контактно-инвариантными (т. е. сохраняются ли они при контактоморфизмах полнотория на себя, сохраняющих ориентацию базисной окружности и коориентацию контактных плоскостей)?

Положительно решено Э. Жиру. Положительный ответ следовал бы из связности описанной группы контактоморфизмов, но эта связность не доказана. Доказано лишь, что контактоморфизмы описанного типа не могут менять тип тривиализации расслоения тора «на бесконечности» ($x^2 + y^2 \gg 1$) *и над базисной окружностью.*

1994-8. Во что превращается неравенство Беннекена, когда лежандровы кривые лежат в ST^*M^2?

1994-9. Имеет ли универсальное расслоение Милнора поверхностей для A_2 в $\mathbb{C}^3$ ($x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2 + y^2 + z^2 = 0$) симплектическую плоскую связность?

Для кривых в $\mathbb{C}^2$ *она строится так: эллиптическая кривая с отмеченной точкой отождествляется с близкой такой же кривой при помощи вещественного линейного преобразования овеществления накрывающей плоскости, переводящего базис исходной решетки периодов в базис близкой решетки.*

1994-10. Как растет с n число классов плоских (сферических) кривых с n двойными точками? Как распределены эти кривые по индексам (является ли предельное распределение гауссовым)?

Эмпирическое распределение для плоских кривых с $n = 5$: 26, 133, 290, 364, 290, 133, 26.

1994-11. Исследовать особенности формы кривизны естественной (адиабатической) связности расслоения собственных векторов многообразия эрмитовых матриц вблизи дискриминанта кратных собственных чисел.

1994-12. Сравнить кривые версальных деформаций отображений $(\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ с классификацией иммерсий длинных кривых на плоскость: какие классы реализуются, каковы бифуркационные диаграммы (стабилизация!), сколько компонент связности имеет дополнение к бифуркационной диаграмме, определяется ли компонента связности дополнения гладким типом длинной кривой, как выражаются реализующиеся значения инвариантов (J^+, J^-, St и других) через локальную алгебру особенности, во что превращается вся эта теория при комплексификации, т. е. для отображений $(\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$?

1994-13. Частица в магнитном поле на поверхности M^2: исследовать лежандровы векторные поля дивергенции нуль в ST^*M^2, в частности — их замкнутые орбиты. Не является ли лежандровость бездивергентного поля по отношению к некоторой (к стандартной?) контактной структуре на $\mathbb{S}^3$ препятствием к существованию контрпримеров к гипотезе Зейферта (о существовании не менее двух замкнутых траекторий у бездивергентного поля без особых точек)?

1994-14. Частица в магнитном поле на римановом многообразии любой размерности: поле задается замкнутой 2-формой (подкручивающей симплектическую структуру фазового пространства). В случае сильного поля (большой кривизны траекторий) применить метод усреднения и сформулировать хотя бы гипотезы о топологически необходимых замкнутых траекториях, обобщающие теорему о $2g + 2$ кривых заданной большой геодезической кривизны на поверхности рода g.

1994-15. Верно ли, что проективная кривая, более не пересекающаяся со своими соприкасающимися гиперплоскостями, выпукла (имеет, считая кратности, не больше точек пересечения с любой гиперплоскостью, чем размерность объемлющего пространства)? Исследовать число компонент связности и границу многообразия выпуклых кривых в $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ (стратификация, бифуркационные диаграммы, стабилизация, ...). *Компонента связности — если не учитывать ориентации — одна (С. С. Анисов).*

1994-16. Доказать, что кривая в $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, проективно двойственная выпуклой, выпукла. *Доказано Б. А. Хесиным и В. Ю. Овсиенко; более простое доказательство дал М. Э. Казарян.*

1994-17. Найти все проективные кривые, проективно эквивалентные двойственным. *Кажется, ответ неизвестен уже в $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$?*

1994-18. Исследовать границу многообразия мёбиусовых кривых в $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ (мёбиусовы кривые — это кривые из связной компоненты пространства кривых, имеющих не менее трех точек перегиба, содержащей все близкие к $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ кривые).

1994-19. Исследовать границу многообразия теннисных иммерсий $\mathbb{S}^1 \to S^2$ (*теннисная иммерсия* — это иммерсия из той связной компоненты пространства кривых в S^2, которые делят площадь пополам и имеют не менее четырех точек перегиба, каковая компонента содержит все близкие к экватору делящие площадь пополам кривые).

1994-20. Исследовать особенности каустики эллипсоида в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ (или в $\mathbb{R}^n$, $n > 4$). *Гипотетически эти особенности топологически неизбежны: каустики других (выпуклых?) гиперповерхностей имеют не меньше особенностей, и это даже верно для лагранжева коллапса над* $\mathbb{R}^n$ *(гипотеза В. М. Закалюкина).*

1994-21. Всякий ли узел в $ST^*\mathbb{R}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$ реализуется как лежандров узел иммерсии $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$? *Да — решено А. Шумаковичем.*

1994-22. Доказать, что выпуклая кривая в $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n}$ всегда аффинна (не пересекает некоторую гиперплоскость). *Доказано С. С. Анисовым (и другими).*

1994-23. Рассмотрим фронт выпуклой кривой в $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ (его точки — это те гиперплоскости, которые касаются кривой). Будут ли фронты разных выпуклых кривых гомеоморфны? Диффеоморфны? Описать топологию (комбинаторику) фронта: число компонент связности дополнения и т. д. Это интересно сделать уже для простейшей кривой $x_k = \cos kx$, $y_k = \sin kx$ $(k = 1, \ldots, n)$ в $\mathbb{R}^{2n}$ (даже если ответ для других кривых другой). *Эта задача породила исследования комплексных и вещественных тригонометрических многочленов, отображения Ляшко–Лойенги–Лорана и комбинаторики графов, но сама еще не решена.*

1994-24. Являются ли ряды Пуанкаре чисел модулей в большинстве локальных задач анализа рациональными функциями? *Например, верно ли это для почти всех f (для всех f, не принадлежащих некоторому подмножеству бесконечной коразмерности в пространстве рядов Тейлора) для следующих классификационных задач:*

— классификация римановых (или эйнштейновых) метрик f в окрестности точки пространства с точностью до сохраняющего эту точку локального диффеоморфизма пространства;

— классификация векторных полей f на многообразии в окрестности особой точки поля с точностью до сохраняющего эту точку локального диффеоморфизма многообразия;

— классификация гладких отображений $f\colon M^m \to N^n$ в окрестности точки $x \in M$ с точностью до локальных диффеоморфизмов M и N, сохраняющих x и $f(x)$;

— классификация гамильтоновых векторных полей f в окрестности особой точки поля с точностью до локального симплектоморфизма, сохраняющего эту точку;

— локальная классификация дифференциальных уравнений второго порядка $y'' = f(x, y, y')$;

— классификация ростков f гиперкелеровых структур на многообразии размерности $4n$ с точностью до локальных диффеоморфизмов?

Напомним, что рядом Пуанкаре чисел модулей данного (локального) объекта называется ряд $M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} m(k)t^k$, где $m(k)$ — число модулей k-струи этого объекта.

1994-25. Возможно ли построить теорию достаточных струй для разложений, содержащих логарифмические члены?

1994-26. Существует ли минимальный аттрактор системы уравнений Навье–Стокса, размерность которого неограниченно растет при исчезающей вязкости ($\dim \to \infty$ при $\nu \to 0$)?

1994-27. Верно ли, что минимум размерностей аттракторов системы уравнений Навье–Стокса неограниченно растет при исчезающей вязкости?

1994-28. (Я. Б. Зельдович) Существует ли такое бездивергентное поле скоростей $\mathbf{v}$ на трехмерном торе $\mathbb{T}^3$, что магнитное поле $\mathbf{B}$, удовлетворяющее системе

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \{\mathbf{v}, \mathbf{B}\} = \mu \Delta \mathbf{B}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

экспоненциально растет со временем для некоторого начального поля $\mathbf{B}_0$? Существует ли бездивергентное векторное поле $\mathbf{v}$ на $\mathbb{T}^3$, являющееся быстрым кинематическим динамо?

1994-29. (Я. Б. Зельдович – А. Д. Сахаров) Существует ли сохраняющий объемы диффеоморфизм трехмерного шара B^3, при итерациях которого энергия начального бездивергентного векторного поля экспоненциально растет с числом итераций?

1994-30. Рассмотрим гладкую функцию u_0, заданную на диске $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Найти инфимум интеграла Дирихле

$$I[u] = \iint \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx\, dy$$

на множестве всех гладких функций u, которые могут быть получены из u_0 сохраняющим площади диффеоморфизмом диска на себя.

1994-31. Рассмотрим пылевидную гравитирующую среду в обычном евклидовом трехмерном пространстве. Описать особенности гиперповерхностей каустик и плотности частиц в физическом пространстве после образования первых каустик. Верно ли, что топологическая структура особенностей решения уравнений Власова–Пуассона для начальных распределений общего положения, сконцентрированных вдоль общих гладких лагранжевых сечений кокасательного расслоения, такая же, как и в случае уравнения Власова (где гравитационное взаимодействие не принимается во внимание)? Имеют ли особенности плотности в окрестности точек каустик и их особенностей такие же порядки, как и в случае невзаимодействующих частиц?

1994-32. Вычислить асимптотическое поведение максимальных показателей осцилляции $\beta(p)$ и $\beta_n(p)$, встречающихся в общих p-параметрических семействах осциллирующих интегралов от функций n переменных.

1994-33. Рассмотрим аналитическую гамильтонову систему общего положения, близкую к интегрируемой: $H = H_0(p) + \varepsilon H_1(p, q, \varepsilon)$, где возмущение H_1 является 2π-периодическим по угловым переменным $(q_1, \ldots, q_n)$ и где невозмущенная функция Гамильтона H_0 зависит от переменных «действие» $(p_1, \ldots, p_n)$ общим образом. Пусть n больше двух.

Доказать или опровергнуть следующую гипотезу. Для любых двух точек p', p'' одной связной компоненты гиперповерхности уровня функции H_0 в пространстве переменных «действие» существуют орбиты, соединяющие произвольно малую окрестность тора $p = p'$ с произвольно малой окрестностью тора $p = p''$, если $\varepsilon \neq 0$ достаточно мало и H_1 общего положения.

1994-34. Доказать или опровергнуть следующую гипотезу. Положение равновесия 0 общей аналитической гамильтоновой системы неустойчиво по Ляпунову, если квадратичная часть функции Гамильтона в 0 не является положительно или отрицательно определенной.

1994-35. Оценить снизу число замкнутых орбит движения заряженной частицы в магнитном поле, ортогональном поверхности, вдоль которой частицы движутся. *Предположительно в общем положении число периодических орбит не меньше $2g + 2$ на поверхности рода g для любой данной начальной энергии. С точки зрения математики это задача о замкнутых кривых заданной положительной геодезической кривизны в каждой точке римановой поверхности. В случае достаточно сильного магнитного поля эта гипотеза доказана, ср. задачу 1994-14.*

1994-36. Рассмотрим q векторов $(\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_q)$, приложенных в начале координат евклидовой плоскости, концы которых являются вершинами правильного q-угольника. Рассмотрим сумму q равных гармонических волн с этими волновыми векторами. Если $q \neq 1, 2, 3, 4, 6$ (например, если $q = 5$), эта сумма не является периодической (но квазипериодической) функцией. *Пример*: $q = 5$, $H(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{5} \cos(\mathbf{k}_j, \mathbf{r})$.

Верно ли, что все замкнутые компоненты линий уровня $H = h$, которые ограничивают области, содержащие начало координат, лежат в конечной окрестности начала координат? Существует ли неограниченная фазовая кривая гамильтоновой системы, заданной функцией Гамильтона H?

1994-37. Является ли задача устойчивости положения равновесия векторного поля, компоненты которого суть многочлены с целыми коэффициентами, алгоритмически разрешимой?

1994-38. В этой и последующих четырех задачах речь идет об аналитической (а также геометрической) разрешимости аналитических задач.

Введем в рассмотрение множество «допустимых многообразий» и «допустимых отображений» со следующими свойствами:

— для любого n арифметические пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ допустимы;

— всякое рациональное отображение допустимо;

— образ и прообраз допустимого многообразия при допустимом отображении — допустимые многообразия;

— пересечение, объединение и взаимные дополнения двух допустимых многообразий — допустимые многообразия;

— суперпозиция двух допустимых отображений — допустимое отображение;

— если $f(x, y)$ — допустимая функция, то ее производная по x, а также первообразная, ветвь которой фиксирована значением в некоторой допустимой точке, допустимы.

Рассмотрим теперь аналитическую задачу, заданную каким-то выбором функций (компонент векторных полей, функций Гамильтона и т. п.), которые могут зависеть от параметров. Эти функции суть *данные* задачи. *Допустимое множество задачи* — это минимальное допустимое множество, содержащее данные задачи. Задача называется *аналитически разрешимой*, если ее решение есть допустимая функция параметров.

Доказать или опровергнуть следующую гипотезу: существует число M и две функции N и D такие, что проблема устойчивости положения равновесия 0 векторного поля в $\mathbb{R}^n$, компоненты которого суть многочлены степени d, аналитически неразрешима,

а) если n и d больше, чем M,
б) если $d > 1$ и n превосходит $N(d)$,
в) если $n > 2$ и d превосходит $D(n)$.

1994-39. Доказать или опровергнуть следующую гипотезу: проблема интегрируемости дифференциального уравнения, заданного векторным полем в пространстве размерности $n > 1$, компоненты которого являются многочленами степени $d > 1$, аналитически неразрешима.

1994-40. Доказать или опровергнуть следующую гипотезу: проблема полной интегрируемости системы канонических уравнений Гамильтона, заданной полиномиальным гамильтонианом степени $d > 2$ в пространстве размерности $2n > 2$, аналитически неразрешима.

1994-41. Определение: задача *неразрешима геометрически*, если среди задач, которые получаются из данной диффеоморфными заменами в пространстве параметров, нет задач, разрешимых аналитически. Гипотеза: задачи, упомянутые в *1994-38* – *1994-40*, неразрешимы также геометрически.

1994-42. Определение: задача, содержащая как параметр функцию, *почти разрешима*, если в пространстве функций существует убывающая последовательность исключительных подмногообразий возрастающей коразмерности таких, что задача разрешима вне каждого из этих подмногообразий. Гипотеза: среди задач, упомянутых в *1994-38* – *1994-40*, нет почти разрешимых.

1994-43. Рассмотрим векторное поле в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^5$. Многообразие орбит такого поля (выбранного подходящим образом) диффеоморфно произвольному *фальшивому многообразию* $\mathbb{R}^4$ (дифференцируемому многообразию, гомеоморфному, но не диффеоморфному векторному пространству $\mathbb{R}^4$).

Можно ли получить фальшивое $\mathbb{R}^4$, исходя из векторного поля с полиномиальными компонентами? тригонометрическими? аналитическими? элементарными? Можно ли явно выписать хотя бы одно такое векторное поле?

1994-44. *Псевдопериодическое отображение* — это сумма двух отображений: линейного и периодического. *Псевдопериодическое многообразие* — это прообраз точки при псевдопериодическом отображении. Рассмотрим некоторую псевдопериодическую (но не периодическую) кривую в $\mathbb{R}^n$ (относительно фиксированной решетки периодов $\mathbb{Z}^n$). Предположим, что ранг линейной части соответствующего отображения максимален (т. е. равен $n-1$). В этом случае кривая, очевидно, содержит бесконечную ветвь (находящуюся на конечном расстоянии от некоторой прямой).

Верно ли, что некомпактная компонента такой псевдопериодической кривой всегда единственная? *Отрицательно решено Д. А. Пановым.*

1994-45. Пусть $A\colon M \to M$ — аналитический диффеоморфизм компактного аналитического многообразия (например, тора $\mathbb{T}^2$). Верно ли, что число периодических точек периода n такого диффеоморфизма оценивается сверху показательной функцией от n?

Здесь предполагается, что периодические точки x невырождены (т. е. что 1 не является собственным значением производной отображения A^n в x). Диффеоморфизмы A общего положения не имеют вырожденных периодических точек.

1994-46. Верно ли, что число периодических орбит периода не более T полиномиального векторного поля на компактном шаре в $\mathbb{R}^m$ оценивается сверху показательной функцией от T?

1994-47. Гипотеза: число периодических точек отображения класса C^∞ почти всегда растет не быстрее некоторой показательной функции от периода.

«Почти всегда» здесь означает «для почти всех значений параметра (в смысле мере Лебега) во всяком типичном семействе отображений, зависящих от достаточно большого числа параметров».

1994-48. Рассмотрим два компактных подмногообразия X^k и Y^l в компактном многообразии M^m. Пусть $A\colon M \to M$ — дифференцируемое отображение. Рассмотрим последовательные образы многообразия X под действием итераций A^n отображения A. Чтобы измерять их сложность (увеличивающуюся с ростом n), рассматриваются их пересечения $Z(n) = (A^n X) \cap Y$ с неподвижным многообразием Y. Эти пересечения $Z(n)$, как правило, являются гладкими многообразиями размерности $s = k + l - m$.

Изучить асимптотическое поведение топологической сложности $|Z(n)|$ многообразия $Z(n)$ как функции времени n.

В частности, верно ли, что для многообразий и отображений класса C^∞ топологическая сложность пересечения $Z(n)$ почти всегда оценивается сверху некоторой показательной функцией времени n?

1994-49. Рассмотрим два ростка голоморфных кривых, проходящих через начало координат плоскости $\mathbb{C}^2$:

$$(X, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^2, 0) \hookleftarrow (Y, 0),$$

и росток голоморфного отображения, сохраняющего начало координат: $A\colon (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$. Будем действовать на X итерациями A и изучать пересечения $A^n X$ с Y. *Число Милнора* $\mu(n)$ есть кратность пересечения кривых $A^n X$ и Y в начале координат.

Допускают ли числа Милнора $\mu(n)$ оценку сверху, экспоненциальную по времени n?

Здесь предполагается, что A — конечнократное отображение и что $A^n X$ и Y различны для каждого n.

1994-50. Рассмотрим некоторую алгебраическую фильтрацию

$$V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \cdots$$

пространства $V_1 = J^\infty$ бесконечных струй пар голоморфных отображений

$$f\colon (\mathbb{C}^k, 0) \to (\mathbb{C}^m, 0), \qquad g\colon (\mathbb{C}^l, 0) \to (\mathbb{C}^m, 0)$$

в начале координат. Многообразия V_i суть алгебраические подмногообразия в J^∞, т. е. каждое из этих многообразий задается полиномиальными уравнениями на конечное число коэффициентов Тейлора. Это конечное число, однако, зависит от i. *Обобщенное число Милнора* $\mu(f, g)$ — это наибольшее из чисел i, для которых пара (f, g) принадлежит V_i.

Рассмотрим теперь голоморфные вложения

$$(X^k, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^m, 0) \hookleftarrow (Y^l, 0)$$

и росток голоморфного отображения $A\colon (\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^m, 0)$.

Гипотеза: обобщенные числа Милнора $\mu(n)$ пар $(A^n X, Y)$ допускают экспоненциальную по n оценку сверху (если только A — отображение конечной кратности, и все его числа Милнора конечны).

1994-51. Инфинитезимальный вариант 16-й проблемы Гильберта. Предположим, что полиномиальное векторное поле на плоскости имеет первый интеграл, линии уровня которого являются циклами (заполняющими, по крайней мере, некоторое кольцо на плоскости). Рассмотрим малые полиномиальные возмущения (фиксированной степени) этого векторного поля. Места рождения предельных циклов даются, в первом приближении, нулями некоторого интеграла (найденного Пуанкаре) вдоль невозмущенных замкнутых орбит (эти орбиты суть линии уровня первого интеграла).

Является ли число нулей интеграла Пуанкаре ограниченным (константой, зависящей только от степени возмущений)?

1994-52. Частный случай предыдущей задачи: рассмотрим полный абелев интеграл

$$I(h) = \oint (P\,dx + Q\,dy)$$

вдоль овала алгебраической кривой $H(x, y) = h$. Многочлены $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ описывают инфинитезимальную вариацию гамильтонова векторного поля, а $I(h)$ — интеграл Пуанкаре. Оценить сверху число вещественных нулей функции I для всех многочленов (P, Q) фиксированной степени.

1994-53. Материализация резонансов в голоморфной динамике. Рассмотрим голоморфное отображение окрестности G окружности $\mathbb{S}^1$ (в комплексной плоскости $\mathbb{C}$) на некоторую другую окрестность той же окружности:

$$A\colon (G, \mathbb{S}^1) \to (G', \mathbb{S}^1).$$

Предположим, что A индуцирует диффеоморфизм окружности $\mathbb{S}^1$, сопряженный с поворотом R_λ на угол $2\pi\lambda$, так что сопрягающий диффеоморфизм B голоморфен в некоторой окрестности окружности: $A = BR_\lambda B^{-1}$. Предположим, что число вращения Пуанкаре λ иррационально.

Предположим, что максимальное кольцо M (диффеоморфное $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$), в котором отображение A сопряжено с поворотом, содержится в окрестности G окружности $\mathbb{S}^1$ вместе со своей границей ∂M.

Верно ли, что любая окрестность всякой точки границы ∂M содержит точку периодической орбиты отображения A, лежащей в произвольно малой окрестности границы? Верно ли это хотя бы в случае общего положения?

1995

1995-1. Исследовать топологию стратификации пространства тригонометрических многочленов (вещественных и комплексных) с точностью до топологической эквивалентности.

1995-2. Исследовать отображения типа Ляшко–Лойенги для рациональных функций, в особенности в случае двух полюсов (многочлены Лорана) и трех полюсов («модулярные многочлены»), когда набор полюсов не имеет модулей и ответ от расположения полюсов не зависит.

Вычислить кратности этих отображений на различных стратах дискриминанта (обобщая формулу Кэли для числа деревьев).

1995-3. Доказать, что поверхность, двойственная малому возмущению проективной плоскости в $\mathbb{RP}^3$, имеет не менее четырех ребер возврата (гипотеза Ф. Аикарди), хотя бы для инфинитезимальных возмущений.

Б. Сегре доказал, что это так для кубических поверхностей, и попытки найти контрпример при помощи возмущения старшими сферическими гармониками не дали результата. Число ласточкиных хвостов на двойственной поверхности получается не меньшим шести.

Если же разложение возмущения по сферическим гармоникам не содержит кубических гармоник и начинается с гармоник пятой степени, то в примерах Аикарди получается не менее 8 *ребер возврата и не менее* 14 *ласточкиных хвостов.*

1995-4. Точка на гладкой плоской кривой называется точкой n-перегиба, если порядок касания с подходящей алгебраической кривой степени n в этой точке выше, чем обычно. Например, точки 1-перегиба — это обычные точки перегиба (в которых кратность пересечения кривой с касательной не меньше 3). Кратность пересечения с ближайшей кривой степени n обыкновенно равна $(n^2+3n)/2$.

Сколько точек 4-перегиба несет всякая плоская кривая, достаточно гладко близкая а) к окружности, б) к кубическому овалу, в) к овалу кривой степени 4? Аналогичные вопросы имеются и для любого n.

Всякая выпуклая кривая несет не менее 6 *точек* 2*-перегиба (пересечение в них* 6*-кратное, поэтому они называются секстатическими точками). Кривая, гладко близкая к окружности, имеет не менее* 8 *точек* 3*-перегиба (и существуют такие кривые с ровно восемью точками невырожденного* 3*-перегиба). Но кривая, гладко близкая к овалу кубической кривой, имеет не менее* 10 *точек* 3*-перегиба (в них пересечения с подходящими кубиками* 10*-кратные). Интересно, где проходит граница между «близостью к овалу кубики» и «близостью к окружности» и что на ней происходит. Возможно, что при учете старших производных окружность становится недостаточно выпуклой кривой, и существует интересный класс n-выпуклых плоских кривых со специально хорошими свойствами для каждого n.*

1995-5. Каустика общего лагранжева коллапса над $\mathbb{R}^3$ имеет не менее трех ребер возврата (гипотеза В. М. Закалюкина). *Три ребра реализуются каустикой эллипсоида, так что гипотеза утверждает, что случай эллипсоида — минимально сложный: встречающиеся в нем особенности топологически необходимы.*

1995-6. Построить теорию Морса с параметрами, обосновывающую топологическую необходимость присутствия сложных критических точек функций на слое при некоторых значениях параметра топологической сложностью расслоения, на тотальном пространстве которого задана исходная гладкая функция. Перенести эту теорию на случай многозначных функций (т. е. лагранжевых пересечений).

1995-7. Исследовать особенности многообразия вещественных полностью разложимых на вещественные прямые проективных кривых.

Теория Максвелла–Сильвестра сферических гармоник утверждает, что это странное подмногообразие проективного пространства кривых степени n удивительным образом «зацеплено» с дополнительным проективным пространством кривых, содержащих в качестве компоненты мнимую окружность $x^2+y^2+z^2=0$ *(в том смысле, что через каждую точку дополнения к обоим проходит единственная прямая, соединяющая их и пересекающая каждое из них в одной точке). Бывают ли еще другие подобные «зацепления»?*

1995-8. Найти простейшие (с наименьшим числом особенностей) пары иммерсированных в плоскость положительно коориентированных кривых с одинаковыми лежандровыми узлами в $ST^*\mathbb{R}^2$, для которых пока не удается построить регулярной гомотопии без сонаправленных самокасаний (и затем попытаться доказать, что таковой не существует).

1995-9. Найти простейшие пары иммерсированных в плоскость положительно коориентированных кривых (или фронтов), у которых совпадают оснащенные узлы, но для которых не удается доказать лежандрову эквивалентность узлов в $ST^*\mathbb{R}^2$ (и затем попытаться доказать лежандрову неэквивалентность).

1995-10. Найти простейший фронт с нулевым индексом Маслова, лежандров узел которого в $ST^*\mathbb{R}^2$ не удается реализовать лежандровой кривой с гладким фронтом (и затем попытаться доказать нереализуемость).

1995-11. Как вычислить минимальное число точек перегиба на реализациях данного класса иммерсий окружности в плоскость (сферу, проективную плоскость, поверхность рода g с метрикой Лобачевского)? *Например, на плоскости восьмерка имеет не меньше двух точек перегиба, а на сфере может не иметь ни одной.*

На эту тему есть работа Б. З. Шапиро; ср. с диссертацией Э. Феррана (который доказал симплектическую или контактную эквивалентность семейства прямых многообразия Адамара стандартному, в частности — для плоскости Лобачевского получаются все результаты типа четырех вершин).

1995-12. Перенести теорию вполне интегрируемых гамильтоновых систем симплектической геометрии в контактную геометрию (где, например, лагранжевы инвариантные многообразия с их естественной аффинной структурой, определенной лагранжевым расслоением, должны замениться на лежандровы инвариантные многообразия с их естественной проективной структурой, определенной лежандровым расслоением). Перенести на этот случай теорему Лиувилля и найти применения к бесконечномерной ситуации (когда уравнения характеристик будут уравнениями с частными производными).

1995-13. Верна ли «последняя геометрическая теорема» Якоби, согласно которой первая каустика (множество первых сопряженных точек любого «полюса» вдоль всех выходящих из него геодезических) типичного эллипсоида имеет ровно четыре точки возврата?

1996

1996-1. Формула Эйзенбада–Левина для индекса особой точки векторного поля «загоняет» в локальную алгебру особенности глобальный топологический инвариант (степень отображения). Во что превращаются другие глобальные инварианты при аналогичной локализации (как в комплексном, так и особенно в вещественном случае) — например, характеристические классы и числа?

1996-2. Вычислить когомологии и фундаментальные группы дополнений к стратам коразмерности 2 (и выше) в пространстве иммерсированных в плоскость кривых. *При большой коразмерности страта первые* *группы гомотопий и, следовательно, гомологий, вероятно, тривиальны. Интересно сравнить результаты с таковыми же для аналогичных вопросов о пространствах версальных деформаций ростков отображений* $(\mathbb{R},0) \to (\mathbb{R}^2,0)$ (*стабилизация при усложнении особенностей*).

1996-3. Доказать, что n-я симметрическая степень $\mathbb{R}P^2$ есть $\mathbb{R}P^{2n}$.

1996-4. Доказать диффеоморфность каустики и страта Максвелла особенности B_4 и перенести результат на старшие особенности B_k (учитывая симплектические или контактные структуры). *Симплектическая версия построена Ф. Наполитано в статье* Napolitano F. Duality between the generalized caustic and Maxwell stratum for the singularities B_{2k} and C_{2k}. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1997, **325**(3), 313–317.

1996-5. (П. Г. Гриневич) Пусть в вещественном интеграле Фурье $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}\,dk$, $F(-k) = \overline{F(k)}$, отсутствуют младшие гармоники $[F(k) = 0$ при $|k| \leqslant \omega]$. Тогда предельное среднее число нулей f на больших интервалах не меньше, чем среднее число нулей функции $\cos \omega x$ (т. е. предел средней плотности нулей не меньше, чем ω/π).

Для ряда Фурье число перемен знака функции на окружности не меньше, чем число нулей наинизшей гармоники Фурье, входящей в ряд Фурье с ненулевым коэффициентом.

1996-6. (Ф. Аикарди) Сопоставим положительно определенной квадратичной форме f в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ два однопараметрических семейства гиперповерхностей: a) семейство эквидистант эллипсоида $f = 1$; b) семейство «квадратикоид», заданных опорными функциями $f + t$ на единичной сфере.

Вычисления показывают, что перестройки при изменении t в этих двух семействах топологически одинаковы при соответствующих (разных) формах (и, более того, бифуркационные диаграммы в пространствах собственных чисел форм даже диффеоморфны).

Объяснить эту эквивалентность семейств, построив естественное отображение между ними. Сохраняется ли она в $\mathbb{R}^n$?

Квадратикоида и эквидистанта для двух соответственно выбранных форм определяют одинаковые поля крестиков на сфере Гаусса *(образы полей главных направлений при гауссовом отображении). Гипотеза Ф. Аикарди: перестройки квадратикоид топологически необходимы при выворачивании фронта, осуществляемом лежандровым коллапсом (и даже любой лежандровой изотопией). Гипотезу Аикарди следует сопоставить с гипотезой В. М. Закалюкина о каустиках эллипсоидов: по Аикарди квадратикоиды тоже минимизируют сложность перестроек.*

1996-7. Рассмотрим типичную функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Асимптотические направления графика ($d^2 f = 0$) определяют поле крестиков в гиперболической области отрицательности гессиана (со стандартными особенностями на границе, состоящей из параболических точек, где гессиан обращается в нуль, а крестик вырождается в прямую). Какие ограничения на топологию поля крестиков (т. е. на сечение соответствующего расслоения над гиперболической областью) накладывает происхождение этого поля из функции в качестве поля асимптотических направлений?

1996-8. Исследовать кратности и трансверсальные кратности отображения Ляшко–Лойенги для многочленов, многочленов Лорана и модулярных многочленов на различных стратах и парах стратов. *Для многочленов решено Д. А. Звонкиным; трансверсальные кратности во всех случаях одинаковы.*

1996-9. М. Барнер определяет *сильно выпуклые* кривые в $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ как кривые, через каждые $n - 2$ точки которых проходит гиперплоскость, более не встречающая кривую. Например, кривая, проекция которой из точки на гиперплоскость выпукла в $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$, сильно выпукла по Барнеру в $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$.

Исследовать многообразие сильно выпуклых кривых: число его компонент связности, особенности границы, свойства двойственных кривых, существование сильно выпуклых проекций и надстроек.

1996-10. Назовем плоскость коразмерности 2 в проективном пространстве $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n}$ *внутренней* по отношению к выпуклой кривой, если каждая гиперплоскость, содержащая ее, пересекает кривую в $2n$ точках. Существуют ли внутренние плоскости? Каковы топологические инварианты многообразия таких плоскостей? *При $n = 1$ речь идет о точках области, ограниченной кривой. Задача (положительно) решена С. С. Анисовым и С. М. Гусейн-Заде.*

1996-11. Назовем прямую в проективном пространстве $\mathbb{R}P^{2n}$ *внешней* по отношению к выпуклой кривой, если через каждую точку этой прямой проходят $2n$ соприкасающихся гиперплоскостей. Существуют ли внешние прямые? Каковы топологические инварианты многообразия таких прямых? *При $n = 1$ речь идет о прямых, не пересекающих кривую. Задача (положительно) решена С. С. Анисовым и С. М. Гусейн-Заде.*

1996-12. Вычислить когомологии подгрупп группы кос, соответствующих накрытиям Л2 (Ляшко–Лойенги) и Л3 (Ляшко–Лойенги–Лорана) дополнения к ласточкину хвосту.

Классифицирующие пространства $K(\pi, 1)$ этих групп известны: это дополнения к бифуркационным диаграммам пространств обычных и лорановских многочленов соответственно.

1996-13. Исследовать многообразие рациональных функций с тремя полюсами и его отображение Л4 (сопоставляющее функции набор ее критических значений).

1996-14. Определить и исследовать комплекс Морса бездивергентного векторного поля в $\mathbb{S}^3$ (соответствующего функции на пространстве замкнутых кривых, значение которой на кривой равно потоку поля через затягиваемую кривой пленку).

Экстремалями этого функционала являются замкнутые траектории поля. Второй дифференциал имеет бесконечное число как положительных, так и отрицательных квадратов, но можно пытаться изучать «разность индексов» для двух замкнутых траекторий при помощи теории бифуркаций. Если поле вдобавок лежандрово по отношению к некоторой контактной структуре, то можно попытаться вычислить эту разность индексов двух замкнутых траекторий по геометрии ограничения контактной 1-формы на поверхность, краем которой является разность этих траекторий.

1996-15. Рассмотрим дискретную подгруппу группы движений плоскости Лобачевского [например, модулярную группу $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$]. Эта группа действует не только на плоскости Лобачевского, но и в мире Де Ситтера (представленном однополостным гиперболоидом $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ в модели Клейна, в которой плоскость Лобачевского изображается полой двуполостного гиперболоида $x^2+y^2-z^2 = -1$).

Метрике плоскости Лобачевского соответствует на гиперболоиде Де Ситтера инвариантная лоренцева метрика. В проективной модели плоскость Лобачевского соответствует внутренности единичного круга, а мир Де Ситтера — внешности; геодезические в обоих случаях — прямые, а изометрии — проективные преобразования плоскости, сохраняющие разделяющую окружность.

Как распределена орбита точки мира Де Ситтера под действием дискретной группы (например, для модулярной группы)? Можно ли определить для этого мира разумные фундаментальные области, подобные многоугольным областям Вороного на плоскости Лобачевского? *Вопрос вызван работами Э. Брискорна и его учеников о группах монодромии.*

1996-16. (Обобщение теоремы Шевалле?) Группа Кокстера $D(n)$ действует на пространстве $(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^n$ так: перестановке координат в $\mathbb{R}^n$ соответствует перестановка сомножителей, а изменению знака координаты — антиподальная инволюция сомножителя. Многообразие орбит этого действия диффеоморфно S^{2n} (теорема Максвелла–Сильвестра теории сферических функций). Мы получаем линейное действие $(2n-1)$-мерной группы Ли в $\mathbb{C}^{2n}$ с гладким многообразием орбит $\mathbb{R}^{2n+1}$. Как описать все такие действия?

1996-17. Рассмотрим гладкую функцию F общего положения на плоском двумерном торе, меняющую знак. Исследовать движение заряженной частицы малой энергии в таком магнитном поле (т. е. кривые геодезической кривизны F/ε в каждой точке, $\varepsilon \to 0$).

В области, где $F \neq 0$, частица совершает ларморовское вращение по окружности малого радиуса ε/F, центр которой медленно дрейфует вдоль линии уровня функции F. Траектории, пересекающие линию $F = 0$, состоят из петель альтернирующей ориентации, соединенных отрезками траектории с точками перегиба, лежащими на кривой

$F = 0$. Требуется выписать соответствующие асимптотические формулы в окрестности кривой $F = 0$ (где нарушаются предположения обычного метода усреднения) и, в частности, вычислить направление дрейфа.

Не приведут ли эти вычисления к контрпримерам в задаче о четырех замкнутых фазовых траекториях, гомотопных слою сферизованного (ко)касательного расслоения тора, в случае, когда магнитное поле F меняет знак?

1996-18. Рассмотрим положительную гладкую функцию F общего положения на стандартной сфере S^2. Исследовать движение со скоростью 1 заряженной частицы в таком магнитном поле (т. е. исследовать кривые геодезической кривизны F в каждой точке). Существуют ли (две?) замкнутые траектории, фазовые кривые которых гомотопны слою сферизованного (ко)касательного расслоения сферы?

Такие траектории есть, если функция F достаточно велика. Верно ли, что они всегда имеются у лежандрова векторного поля дивергенции нуль естественной контактной структуры в ST^*S^2 без особых точек? Наше поле фазовой скорости обладает этими свойствами, и вдобавок оно трансверсально полю плоскостей в ST^*S^2, заданному римановой связностью. Ситуация кажется сходной с гипотезой А. Вейнстейна, доказанной К. Витербо, и может быть промоделирована при помощи полей на $\mathbb{S}^3$ вместо ST^*S^2.

1996-19. Исследовать асимптотические кривые на кубических поверхностях в $\mathbb{R}P^3$ (например, на близких к плоскости $\mathbb{R}P^2$). Интегрируема ли эта динамическая система или хаотична? Как устроена функция последования на параболической кривой (сопоставляющая точке параболической кривой следующую точку возвращения асимптотической линии на параболическую кривую)?

27 *(комплексных) прямых на кубической поверхности являются асимптотическими линиями, так что кое-что можно узнать, применив к ним теорию нормальных форм.*

1996-20. (М. Б. Севрюк) Назовем симплектическую структуру *r-точной*, если ее r-я внешняя степень точна, а $(r-1)$-я — нет ($r \in \mathbb{N}$). В частности, 1-точные структуры — это просто точные.

Обладают ли какими-либо специальными свойствами системы, являющиеся гамильтоновыми относительно r-точных симплектических структур для данного фиксированного r?

1996-21. (М. Б. Севрюк) Существует ли гладкое векторное поле на $\mathbb{R}^n$, не являющееся обратимым относительно никакой инволюции фазового пространства, но с обратимым отображением фазового потока за время 1?

Если ответ на этот вопрос положителен, то существует ли гладкое векторное поле V на $\mathbb{R}^n$ со следующими свойствами: 1) поле V не является обратимым относительно никакой инволюции фазового пространства, 2) для любого $\tau_0 > 0$ найдется такое $\tau \in (0; \tau_0)$, что отображение фазового потока поля V за время τ обратимо?

1997

1997-1. Исследовать комбинаторику бифуркационной диаграммы пространства вещественных тригонометрических многочленов вне области M-многочленов (все критические точки которых вещественны). *Для M-многочленов степени n имеется явная полиэдральная модель. Например, для $n = 2$ бифуркационная диаграмма сводится к астроиде с диагоналями, а модель — к квадрату с диагоналями.*

1997-2. Назовем *селектором* кусочно-линейную функцию на пространстве $\mathbb{R}^n$ с координатами $(x_1, \dots, x_n)$, совпадающую в каждой области, где все координаты различны, с одной из координат. Примерами являются *селекторы Матова*, определяемые выражениями вроде $\max(x_1, x_2, \min(x_3, \max(x_4, x_5, x_6)) \dots)$ (каждый аргумент входит лишь однажды).

Сколько существует селекторов всего и сколько — селекторов Матова? Как узнать по селектору, является ли он селектором Матова?

В. И. Матов доказал, что если $f_1, \dots, f_n$ — гладкие функции общего положения на многообразии M, а S — селектор Матова, то функция $S(f_1, \dots, f_n)\colon M \to \mathbb{R}$ топологически эквивалентна функции Морса (и описал возможные индексы через селектор). Выполнено ли это свойство еще для каких-нибудь селекторов? По вычислениям

Ф. Аикарди, числа селекторов Матова с $n = 1, 2, \ldots$ аргументами равны 1, 2, 8, 52, 472, 5 504, 78 416, 1 220 064, 25 637 824, 564 275 712, ...

1997-3. (А. А. Аграчев – М. Я. Житомирский) Пусть α — 1-форма, невырожденная на краю диска и обращающаяся в нуль на его касательных векторах, и пусть $d\alpha = \alpha \wedge \beta$. Тогда $d\beta$ обязательно обращается где-либо в нуль. *Авторы утверждают, что для отличных от диска поверхностей с краем это не так.*

1997-4. В теории распространения волновых фронтов мы обычно рассматриваем как допустимые все деформации лежандрова многообразия, при которых оно остается несамопересекающимся. В реальных задачах о распространении коориентируемого фронта последний может двигаться только вперед (в указываемом коориентацией направлении), а не назад. Введение этого ограничения меняет постановку задачи как в теории фронтов, так и в теории иммерсий. Например, мы можем рассмотреть ориентированный граф с вершинами-классами кривых и стрелками от класса A к классу B, если существует представитель класса A и его движение вперед, при котором он попадает в класс B.

Вычислить ту часть этого графа, которая соответствует иммерсиям (фронтам) с малым числом точек самопересечения (и, для фронтов, точек возврата). Можно ли перестроить  в  (с другой коориентацией) в классе фронтов с двумя точками возврата?

1997-5. Разрешима ли алгоритмически задача о возможности соединить две иммерсии окружности в плоскость путем в пространстве иммерсий, не имеющих попутных самокасаний? *Гипотетически — неразрешима потому, что в ней можно* (?) *промоделировать задачу об эквивалентности узлов.*

1997-6. (Д. А. Панов) Существует ли функция f (общего положения) на плоскости, гессиан которой положителен в области, ограниченной гладкой замкнутой связной кривой, а поле асимптотических направлений $d^2 f = 0$ на этой параболической кривой имеет единственную эллиптическую особую точку? Верно ли, что гиперболических особых точек на такой кривой не меньше, чем эллиптических?

Напомню определение эллиптических (и гиперболических) особых точек на параболической кривой.

Особые точки — это точки касания асимптотического направления графика с параболической кривой. Над гиперболической областью поле асимптотических направлений определяет поверхность в многообразии неориентированных касательных элементов, двулистно проектирующуюся на гиперболическую область (в каждую точку гиперболической области плоскости проектируются асимптотические направления в этой точке).

Для функции общего положения эта поверхность гладко продолжается асимптотическими направлениями в параболических точках. Асимптотические направления в гиперболических точках поднимаются до поля направлений на построенной поверхности. Это поле направлений на поверхности гладко продолжается до ее критической линии, лежащей над параболической кривой, исключая лишь те «особые» точки параболической кривой, где асимптотическое направление касается этой кривой.

Для функции общего положения эти особые точки являются особыми точками (нулями) гладкого векторного поля общего положения (в окрестности изучаемой точки на построенной поверхности). Эти особые точки могут быть седлами (индекс -1), и тогда они называются **гиперболическими***, или узлами или фокусами (индекс $+1$), и тогда они называются* **эллиптическими***.*

1997-7. (Д. А. Панов) Рассмотрим гладкую функцию F общего положения на двумерном торе. Построим отображение тора в $\mathbb{RP}^2$, сопоставляющее точке тора точку с однородными координатами $[F_{xx} : F_{xy} : F_{yy}]$. У каждой ли точки проективной плоскости не менее четырех прообразов при этом отображении $\mathbb{T}^2 \to \mathbb{RP}^2$?

Для функции общего положения все три производных вместе в нуль не обращаются. Параболические точки отображаются в точки окружности нулевых гессианов $AC = B^2$ ($A = F_{xx}$, $B = F_{xy}$, $C = F_{yy}$). Каждая точка этой окружности действительно имеет не менее четырех прообразов. Это следует из неравенства Морса для функций на окружности. А именно, для каждого трансляционно инвариантного векторного поля на торе, $a\partial/\partial x + b\partial/\partial y$, рассмотрим производную функции F вдоль этого поля. Эта производная имеет 4 критические *точки, которые и доставляют 4 прообраза соответствующей направлению поля точки на окружности параболических точек.*

1997-8. Устойчивость пирамид. Во многих задачах теории особенностей ответ (бифуркационная диаграмма, каустика) имеет вид пирамиды в трехмерном пространстве, горизонтальное сечение которой является (более или менее) гипоциклоидой на плоскости, стягивающейся в точку при приближении плоскости сечения к критическому «нулевому» положению.

Пример 1. Рассмотрим общее однопараметрическое семейство поверхностей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, проходящих через «северный полюс» N, содержащее (при нулевом значении параметра) обычную сферу. На каждой поверхности отметим первую каустику северного полюса N. На сфере это будет южный полюс S. На близких поверхностях эти каустики будут малыми кривыми с четырьмя (для семейств общего положения) точками возврата. Все вместе такие каустики заметают поверхность. Она имеет вид пирамиды, описанный выше.

Пример 2. Рассмотрим положительную функцию F общего положения (магнитное поле) на плоскости и выпустим из точки 0 заряженные частицы, движущиеся по плоскости во всевозможных направлениях, с малой начальной скоростью v. Если бы функция F была константой, траектории частиц были бы ларморовскими окружностями малого радиуса v/F. Соответствующие фазовые кривые образовывали бы в фазовом пространстве точный лагранжев тор, проекция которого на плоскость имеет две огибающие: вырожденную внутреннюю точечную каустику в исходной точке 0 и еще внешнюю каустику — окружность радиуса вдвое большего, чем ларморовский. Вся эта картина зависит от параметра v.

Если F не постоянна, то внутренняя каустика перестанет быть точечной. Она превратится в малую замкнутую огибающую возмущенных траекторий частиц, выходящих из 0 с начальной скоростью данной длины v.

Эта огибающая имеет (для F общего положения) четыре точки возврата и мала вместе с начальной скоростью v. Поместим каждую огибающую в свою плоскость $v = \text{const}$ трехмерного пространства. Все эти огибающие заметут поверхность, имеющую вид пирамиды.

Такая же пирамида получена А. А. Аграчевым в качестве каустики простейшей системы с неголономной связью в теории управления (пример с магнитным полем можно включить в эту схему).

Пример 3. Рассмотрим четырехпараметрическое семейство тригонометрических многочленов

$$F_{A,a,b,c}(t) = A\cos 2t + a\cos t + b\sin t + c.$$

Каустика семейства состоит из тех значений параметров (A, a, b), для которых функция имеет вырожденную критическую точку. Эта поверхность в трехмерном пространстве имеет вид пирамиды, горизонтальные сечения которой ($A = \mathrm{const}$) являются гипоциклоидами с четырьмя точками возврата, малыми вместе с A.

Пример 4. Рассмотрим типичное двупараметрическое семейство функций с точкой нулевого минимума 0 [например, $H_{a,b}(x, y) = x^2+y^2+ a(x^2 - y^2) + 2bxy + Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3$].

Рассмотрим трехпараметрическое семейство исчезающих циклов

$$\gamma_{a,b,c} = \{x, y : H_{a,b}(x, y) = c\}.$$

Число вершин (экстремумов кривизны) кривой γ с очень малым c почти всегда равно четырем. Однако в точке $a = b = c = 0$ пространства параметров на плоскость $c = 0$ выходит, вообще говоря, узким языком область кривых с шестью вершинами.

С плоскостью $c = \mathrm{const} > 0$ эта область пересекается по малой плоской области, ограниченной кривой с шестью точками возврата, похожей на гипоциклоиду. При стремлении c к нулю эта «гипоциклоида» стягивается в точку. Вся граница языка области кривых с шестью вершинами в пространстве параметров имеет вблизи точки $a = b = c = 0$ вид пирамиды.

Задача состоит в том, чтобы исследовать устойчивость всех этих особенностей пирамид. Вопрос во всех случаях сводится к исследованию семейства функций на окружности.

Гипотетически ответы имеют следующий вид: каустика (и соответствующее семейство функций на окружности) устойчива (по отношению к аналитическим или гладким деформациям условия задачи и соответственно к аналитическим или гладким нормализующим диффеоморфизмам) в «конической окрестности» соответствующей пирамиды в пространстве параметров. Эта «коническая окрестность» пирамиды сама ограничена несколько большей пирамидой с той же вершиной. Такая «окрестность» стягивается к одной точке в вершине пирамиды (где, таким образом, приводящий каустику к нормальной форме диффеоморфизм становится всего лишь гомеоморфизмом).

1997-9. Математические троицы. Наряду с парами «объект, его комплексификация» в различных математических теориях часто встречаются тройки объектов. Гипотеза состоит в том, что это не случайно и что все эти тройки связаны коммутативными диаграммами. Стрелки, соединяющие две тройки, обычно сами образуют при этом естественную тройку. Задача заключается в проверке указанной гипотезы и в систематическом изучении таких троек.

Вот несколько примеров троек.

$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$
E_6	E_7	E_8
P_8	X_9	J_{10}
A_3	B_3	H_3
D_4	F_4	H_4
тетраэдр	октаэдр	икосаэдр
$6 = 2 \cdot 3$	$12 = 3 \cdot 4$	$30 = 5 \cdot 6$
$60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$	$45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$	$30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$
$\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\mathbb{S}^0} S^1$	$\mathbb{S}^3 \xrightarrow{\mathbb{S}^1} S^2$	$\mathbb{S}^7 \xrightarrow{\mathbb{S}^3} S^4$
накрытия	связности	?
монодромия	кривизна	??
w_i	c_i	p_i
обычные многочлены	тригонометрические многочлены	модулярные многочлены
обычные числа	тригонометрические числа	эллиптические числа
когомологии	K-теория	эллиптические когомологии

Знаком ? обозначена гипотетическая «гиперсвязность» — это, по-видимому, нечто кватернионное, превращающееся в связность расслоения над комплексными кривыми в базе, имеющей, однако, много *комплексных структур, над кривыми которых эти связности плохо согласованы.*

Знак ?? должен обозначать гипотетическую 4-форму гиперкривизны (скорее всего, измеряющую степень нарушения какого-то обобщения тождества Бьянки гиперсвязностью).

1998

1998-1. Соединить теорию дифференциальных систем Э. Картана с теорией особенностей.

1998-2. Рассмотрим гладкую поверхность общего положения в трехмерном вещественном проективном пространстве, близкую к вещественной проективной плоскости. Может ли такая поверхность иметь меньше шести специальных точек (где асимптотическое направление касается параболической кривой, а двойственная поверхность имеет ласточкин хвост)?

Если специальных точек всего шесть, то может ли число параболических кривых быть меньше четырех?

1998-3. Рассмотрим гладкую параболическую кривую постоянной кратности на поверхности в трехмерном проективном пространстве. На сколько однократных параболических кривых она распадается при малом шевелении общего положения?

Вопрос не решен уже для поверхностей, задающихся в аффинных координатах уравнением вида $z = f(x, y)$ *и имеющих параболической кривой бесконечно удаленную прямую. В этом случае кратность четна (и в простейшей ситуации равна двум), а предполагаемое число однократных параболических кривых возмущенной поверхности равно трем.*

Верно ли, что общая поверхность, близкая к поверхности, заданной в аффинных координатах уравнением $z = 1/(x^2 + y^2)$ [соответственно $z = x/(x^2 + y^2)$], имеет в окрестности бесконечности не менее трех [соответственно двух] параболических кривых?

1998-4. *Сферическим вторым дифференциалом* функции на сфере назовем квадратичную форму на касательном пространстве, измеряющую разность между заданной функцией и ближайшим ограничением на сферу линейной в объемлющем пространстве функции.

Функция называется *гиперболической*, если ее сферический второй дифференциал гиперболичен всюду, исключая конечное число точек (где функции разрешается иметь особенности).

Может ли гиперболическая нечетная функция на двумерной сфере иметь меньше шести логарифмических полюсов?

Может ли нечетная функция, полученная из нечетной гиперболической функции на двумерной сфере при помощи сглаживания общего положения, иметь меньше восьми параболических кривых (вдоль которых сферический второй дифференциал вырождается)?

1998-5. Существует ли поверхность $z = f(x, y)$, гауссова кривизна которой [в точке $(x, y, f(x, y))$] — заданная функция $g(x, y)$? Здесь f и g — гладкие в окрестности точки функции.

Аналогичный вопрос для гессиана требует решения уравнения $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = h(x, y)$, где h — заданная в окрестности точки функция.

Какие особенности может иметь параболическая кривая ($h = 0$) гладкой поверхности в окрестности ее точки уплощения (где $df = 0$, $d^2f = 0$)?

1998-6. Рассмотрим кривую, заданную уравнениями $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \cos 3t$. Эта кривая имеет шесть точек уплощения (нулевого кручения). Можно ли уничтожить все эти точки уплощения при помощи допустимой регулярной гомотопии кривой?

Регулярная гомотопия называется *допустимой*, если во всё время деформации не происходит

а) самопересечений кривой (изменения типа узла);

б) самопересечений двойственной кривой (образованной соприкасающимися плоскостями исходной кривой в двойственном пространстве);

в) возникновения точек перегиба (точек нулевой кривизны);

г) касаний двойственной кривой с поверхностью фронта (образованной касательными плоскостями исходной кривой).

1998-7. Кривые проективного пространства с выпуклыми проекциями образуют область в пространстве кривых. Исследовать границу этой области: ее стратификацию, особенности пересечения границы с трансверсалями к ее стратам, комплекс стратов.

Аналогичные вопросы интересны и для самих выпуклых кривых, и для «сильно выпуклых» кривых Барнера (см. задачу *1996-9*).

1998-8. Исследовать кольца когомологий дополнений к бифуркационным диаграммам голоморфных функций: верно ли, что эти дополнения являются пространствами Эйленберга–Маклейна $K(\pi, 1)$? Чему равны стабильные числа Бетти (и кольца когомологий)?

1998-9. С целой алгебраической функцией, кроме ее группы кос, связан еще ряд групп: вторые, третьи и т. д. косы. Они определяются как фундаментальные группы локальных дополнений к последовательным дискриминантам, каждый из которых является множеством необычных значений проекции предыдущего дискриминанта вдоль слоев одномерного расслоения общего положения. В качестве исходного «дискриминанта» берется график функции, рассматриваемый как гиперповерхность в произведении области определения функции на область значений, расслоенном над областью определения.

Эти группы, дискриминанты, их дополнения, когомологии этих дополнений, а также соответствующие монодромии совершенно не изучены даже для простейшей алгебраической функции $z(a)$, заданной уравнением $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$.

Даже описание образующих и соотношений этих групп представляло бы интерес. При этом, кроме проекций общего положения, интересна и последовательность проекций последовательного забывания $a_n, a_{n-1}, \dots$

1998-10. Как комплексифицировать теорию кос? Индекс Маслова? Теорию инвариантов Васильева?

1998-11. Как ведет себя при большом числе параметров m наибольшее значение кратности (числа Милнора) критической точки голоморфной функции двух перемснных, зависящей общим образом от m параметров?

1998-12. Может ли асимптотическая линия на поверхности $z = f(x, y)$, все точки которой гиперболические, быть замкнутой?

1998-13. Имеет ли новые по сравнению с классическими законы сохранения интегралов от локальных плотностей уравнение Эйлера гидродинамики идеальной жидкости?

Имеются ли такие законы сохранения вдоль орбит коприсоединенного представления группы сохраняющих объемы диффеоморфизмов области течения?

1998-14. Как комплексифицировать кольцо $\mathbb{Z}$? На множестве гомотопических классов отображений группы Ли в себя, переводящих единицу в себя, действуют две, вообще говоря, некоммутативные, операции: «сложение», определенное формулой $(a+b)(g) = a(g)b(g)$, и «умножение», определенное формулой $(ab)(g) = a(b(g))$.

Например, из группы $\mathrm{U}(1) = \mathrm{SO}(2)$ получается кольцо $\mathbb{Z}$, из группы $\mathrm{O}(1)$ — поле $\mathbb{Z}_2$. Что получится из $\mathrm{SO}(3)$? Из $\mathrm{Spin}(4)$? Из других групп?

1998-15. Что является кватернионным аналогом определителя?

1998-16. Как комплексифицировать понятия одномерного голоморфного расслоения, его связности и кривизны? Во что превращаются при комплексификации теории квантового эффекта Холла и фазы Берри?

1998-17. Контактизировать теорему Лиувилля о вполне интегрируемых гамильтоновых системах.

1998-18. Векторное поле v дивергенции нуль на трехмерном многообразии назовем *хоферовским*, если оно является полем ядер 2-формы, имеющей контактный потенциал [это означает, что поле v задается условием $i_v(d\alpha) = 0$, где $\alpha \wedge d\alpha$ нигде не обращается в нуль].

Рассмотрим движение заряженной точки по поверхности под действием перпендикулярного поверхности магнитного поля. При каких условиях соответствующее векторное поле на трехмерном многообразии единичных касательных векторов поверхности является хоферовским? Например, интересен уже случай сферы со стандартной метрикой и не обращающимся в нуль полем.

1998-19. Соотношение неопределенностей Гейзенберга приводит к следующей гипотезе. Пусть Γ — замкнутая подгруппа коммутативной группы евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, фактор-пространство по которой компактно (например, решетка).

Предположим, что в дополнении к Γ содержится шар радиуса r. Тогда в двойственном евклидовом пространстве существует ненулевой «волновой вектор» k длины, не превосходящей c/r, такой, что скалярное произведение (k, x) принимает при x из Γ только целые значения.

Здесь c — зависящая только от n постоянная.

1998-20. Расклассифицировать простые особенности кривых в контактном пространстве.

1998-21. Следующая задача о лежандровых зацеплениях была предложена мне Р. Пенроузом.

Рассмотрим пространство-время $\mathbb{R}^{2+1}$ (с псевдоримановой метрикой сигнатуры $++-$, положительно определенной на изохронах $t = \text{const}$).

Многообразие световых лучей такого пространства имеет естественную контактную структуру. Лучи, исходящие из одной точки пространства-времени, образуют в нем лежандрово подмногообразие.

Задача состоит в том, чтобы исследовать связь между причинностью (возможностью соединить две точки пространства-времени времяподобной кривой) и зацепленностью соответствующих лежандровых многообразий.

1998-22. Рассмотрим полигональный узел из n звеньев в $\mathbb{R}^3$ или в $\mathbb{S}^3$. Как растет с n минимальное число симплексов триангуляции пространства, на 1-остове которой лежит самый сложный n-звенный узел?

1998-23. (Н. А. Некрасов) Рассмотрим фактор-пространство пространства (ростков) пар функций с нулевой скобкой Пуассона по модулю группы (ростков) симплектоморфизмов. Утверждается, что это «многообразие» имеет естественную симплектическую структуру и снабжено естественным дискриминантом комплексной коразмерности один.

Задача состоит в исследовании фундаментальной группы дополнения к этому дискриминанту. Является ли это дополнение пространством Эйленберга–Маклейна? Каково его кольцо когомологий?

1998-24. (А. Н. Варченко) Уравнение $u_{xx}u_t^2 + u_{tt}u_x^2 - 2u_xu_tu_{xt} = 0$ обладает тем свойством, что если u — решение, то и $f(u)$ — решение. Какие еще операторы обладают подобными свойствами инвариантности (и как их использовать для построения соответствующих аналогов гидродинамики, определения топологических инвариантов, топологических вариационных принципов и т. д.)?

1998-25. Задача М. Л. Концевича о жордановых матрицах. Рассмотрим пространство квадратных комплексных матриц фиксированного порядка. Можно ли выбрать по одному представителю у каждого класса подобных матриц так, чтобы все выбранные представители образовывали набор аффинных подпространств пространства матриц?

1999

1999-1. Составить *полный* список примыканий простых особенностей кривых в $\mathbb{C}^N$.

В этой задаче и в шести последующих речь идет о комплексных кривых, т. е. о ростках $(\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C}^N,0)$, однако те же вопросы имеют смысл и для вещественных кривых — ростков $(\mathbb{R},0) \to (\mathbb{R}^N,0)$.

1999-2. Составить список *полугрупп* простых особенностей кривых в $\mathbb{C}^N$.

a) Определяет ли полугруппа тип (простой) особенности?

b) Какие пары полугрупп исключают примыкание соответствующих особенностей (вероятно, простота здесь не существенна)?

c) Реализуются ли остальные примыкания какой-либо парой (простых? не простых?) особенностей с данными полугруппами?

1999-3. Верно ли, что *простые* особенности кривых в $\mathbb{C}^N$ — это в точности те *стабильно простые*, которые реализуются в $\mathbb{C}^N$?

1999-4. Составить список фильтрованных *артиновых алгебр* простых особенностей кривых $f\colon (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C}^N,0)$.

a) Определяет ли тип простой особенности (или ее полугруппу) эта фильтрованная алгебра (или ее действие операторами на $\mathfrak{m}^1/\mathcal{A}_f$)? Здесь $\mathfrak{m}^1$ — максимальный идеал в пространстве ростков функций $(\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C},0)$, а $\mathcal{A}_f$ — идеал, порожденный компонентами отображения f.

b) Определяет ли полугруппа особенности эту алгебру? фильтрацию?

1999-5. *Разрешение особенностей* простых кривых в $\mathbb{C}^N$.

a) Составить список графов разрешений. Как они связаны с вопросом a) задачи *1999-2*?

b) Верно ли, что модули кривых появляются в точности тогда, когда появляются модули разрешений (4 точки на P^1 и т. п.)?

1999-6. *Стабилизация кривых.* Рассмотрим базу версальной деформации $\mathbb{C}^{M(N)}$ более сложной особенности и в ней страт Σ менее сложной.

a) Сколько (локально) неприводимых компонент имеет страт Σ?

b) В каком смысле стабилизируются топологические (гомологические? гомотопические?) свойства дополнения $\mathbb{C}^{M(N)} \setminus \Sigma$ при $N \to \infty$?

c) В каком смысле стабилизируются эти свойства дополнения (стабилизированные при $N \to \infty$ или нет), когда тип менее сложной особенности фиксирован, а тип исходной более сложной (простой? любой?) усложняется?

1999-7. *Страт $\mu = \mathrm{const}$ для кривых.* Рассмотрим «многообразие» особенностей с данной коразмерностью μ орбиты в функциональном пространстве как подмногообразие в базе $\mathbb{C}^\mu$ ее версальной деформации.

a) Гладко ли это «многообразие»? Неприводимо ли?

b) Как вычислить (через полугруппу? алгебру? разрешение?) или хотя бы оценить его размерность m в $\mathbb{C}^{\mu}$ («число внутренних модулей»)?

c) Верно ли, что m полунепрерывно по отношению к выбору исходной особенности, т. е. совпадает с обычной ее модальностью?

1999-8. Зафиксируем натуральное число $n \geqslant 3$ и рассмотрим n натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Их суммы (линейные комбинации с целыми неотрицательными коэффициентами) образуют полугруппу $S(a)$ натуральных чисел:

$$S(a) := \{\langle k, a\rangle \mid k \in \mathbb{Z}_+^n\}$$

($\mathbb{Z}_+ = \{0; 1; 2; \ldots\}$). Предположим, что НОД$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$. Тогда начиная с некоторого $K(a) \in \mathbb{Z}_+$ все целые неотрицательные числа лежат в $S(a)$. *Например, $K(a) = (a_1 - 1)(a_2 - 1)$ при $n = 2$. Отметим, что это значение $K(a)$ всегда четно (так как числа a_1 и a_2 взаимно просты, они не могут быть одновременно четными). Вычисление $K(a)$ при больших n называется задачей Фробениуса.*

Исследовать статистику $K(a)$ для типичных больших векторов a. *Гипотетически*

$$K(a) \approx c\sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_n}, \qquad c = \sqrt[n-1]{(n-1)!}\,.$$

Статистике полугрупп натуральных чисел $S(a)$ для взаимно простых $a_1, a_2, \ldots, a_n$ посвящены и последующие три задачи. *Все эти задачи предназначены прежде всего для компьютерного эксперимента — с перспективой закончить доказательствами. Интересен уже случай $n = 3$.*

1999-9. *При $n = 2$ число $N \in \mathbb{Z}$ принадлежит полугруппе $S(a)$ тогда и только тогда, когда число $K(a) - 1 - N$ ей не принадлежит (Дж. Дж. Сильвестр). Таким образом, при $n = 2$ полугруппа $S(a)$ занимает ровно половину отрезка $[0; K(a) - 1]$ [напомним, что при $n = 2$ число $K(a) - 1$ всегда нечетно].*

Исследовать, какую долю отрезка $[0; K(a) - 1]$ занимает полугруппа $S(a)$ при $n \geqslant 3$ для больших векторов a. *Гипотетически эта доля асимптотически равна $1/n$ (с подавляющей вероятностью при больших a).*

1999-10. *Примеры показывают, что $S(a)$ плотнее заполняет правую половину отрезка $[0; K(a) - 1]$.*

Найти типичную плотность заполнения отрезка $[0; K(a) - 1]$ — асимптотически для больших векторов a. *Гипотетически плотность $p(N)$ в точке $N < K(a)$ асимптотически ведет себя как*

$$p(N) = \left(\frac{N}{K(a)}\right)^{n-1}$$

Из такого распределения немедленно вытекало бы, что полугруппа $S(a)$ занимает $1/n$ отрезка $[0; K(a) - 1]$:

$$\int_0^K (N/K)^{n-1}\, dN = K/n$$

(треугольник заполняет полпрямоугольника, параболический треугольник — треть и т. д.).

1999-11. Рассмотрим плотность полугруппы $S(a)$ с учетом кратностей (считая точку столько раз, сколькими способами она представляется в виде $\langle k, a\rangle$ с $k \in \mathbb{Z}_+^n$).

Найти такую плотность $P(N)$ асимптотически для больших векторов a. *Гипотетически $P(N) \sim N^{n-1}$ при всех N [а не только для $N < K(a)$]. Отметим, что при $n = 2$ обе плотности — с кратностями и без — асимптотически совпадают для $N < K(a)$. Неясно, верно ли это при $n \geqslant 3$.*

1999-12. Комплексифицировать группу $\mathbb{Z}$ целых чисел, воспользовавшись тем, что $\mathbb{Z}$ есть группа кос из двух нитей и одновременно группа крашеных кос из двух нитей. *Гипотетические варианты ответа — $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}^2$.*

1999-13. Группы, порожденные отражениями, и осциллирующие интегралы. Рассмотрим осциллирующий интеграл

$$I(h, \lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{iF(x,\lambda)/h} \varphi(x)\, dx, \quad F\colon (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}, 0), \quad h \to 0,$$

где $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — сосредоточенная в достаточно малой окрестности начала координат гладкая функция. *Показателем особости* β особенности функции $F(\cdot, 0)$ в точке 0 называется инфимум чисел γ, для которых при любой деформации F

$$|I(h,\lambda)| \leqslant C(\varphi)|h|^{\frac{1}{2}n-\gamma}$$

при всех достаточно малых $|\lambda|$ (величина $\beta - \frac{n}{2}$ называется при этом *показателем осцилляции*).

Для простых особенностей показатель особости равен

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}, \tag{1}$$

где N — *число Кокстера* соответствующей группы Кокстера (конечной неприводимой группы, порожденной отражениями в $\mathbb{R}^\mu$), см. статью Арнольд В. И. Замечания о методе стационарной фазы и числах Кокстера. *Успехи матем. наук*, 1973, **28**(5), 17–44:

особенность	A_μ	D_μ	E_6	E_7	E_8
β	$\frac{\mu-1}{2(\mu+1)}$	$\frac{\mu-2}{2(\mu-1)}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{7}{15}$
N	$\mu+1$	$2(\mu-1)$	12	18	30

Формула (1) верна и для краевых особенностей (напомним, что число Кокстера для B_μ равно 2μ).

Задача: построить теорию осциллирующих интегралов и найти аналогичную формулу для остальных (некристаллографических) групп Кокстера F_4, G_2, H_3, H_4, $I_2(p)$ [для которых числа Кокстера равны 12, 6, 10, 30, p соответственно].

1999-14. Рассмотрим семейство гладких поверхностей $z = f_t(x, y)$ в $\mathbb{R}^3$. Предположим, что при $t = 0$ поверхность выпуклая, а при некотором $t = t_\star > 0$ рождается гиперболическая область. В рамках компьютерного эксперимента, проведенного A. Ortiz, т. н. *такнода* — линия точек перегиба асимптотических кривых в гиперболической области — при малых $t - t_\star > 0$ имела вид восьмерки, касающейся границы гиперболической области в двух особых точках. Построить строгую теорию таких восьмерок.

1999-15. Для произведения матриц существует формула Штрассена сокращенного умножения (например, умножение двух матриц 2×2 по этой формуле включает 7 операций умножения, а не 8). Как эта формула связана с тройственностью $\mathbb{R}$–$\mathbb{C}$–$\mathbb{H}$?

1999-16. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ конфигурацию из n кривых, диффеоморфных прямым. Предполагается, что никакие две кривые не пересекаются более чем в 1 точке, и что все пересечения кривых трансверсальны.

Какие конфигурации кривых реализуются прямыми? При каком количестве кривых n начинаются расхождения?

1999-17. Определение. *Антиокружностью* называется кривая на плоскости $\{x, y \mid x^{-2} + y^{-2} = 1\}$.

Теорема 1. Кривая, проективно двойственная антиокружности, есть астроида $\{p, q \mid p^{2/3} + q^{2/3} = 1\}$.

Теорема 2. Множество нормалей к эллипсу является антиокружностью.

Вопрос 1. Есть ли астроида среди эквидистант эллипса? *Согласно Ф. Аикарди, среди эквидистант эллипса нет кривых, ортогонально эквивалентных астроиде. Согласно М. Э. Казаряну и Р. Урибе, — есть кривые, аффинно или проективно эквивалентные астроиде.*

Вопрос 2. Нет ли многомерных аналогов у антиокружности и астроиды?

Вопрос 3. Сдвинем касательные к эллипсу по нормали на данное расстояние s. Каковы свойства получившейся кривой в двойственном пространстве? Есть ли у нее точки возврата? *Согласно Ф. Аикарди, точек возврата нет.*

Никогда не знаешь,
хороша задача или нет,
пока не решишь ее.

Михаил Громов

Комментарии

1956

1956-1

Эта задача упоминается в Предисловии автора (с. IX). Она подробно рассмотрена в статье [1], где, однако, утверждается, что происхождение задачи неизвестно.

[1] Yaschenko I. V. Make your dollar bigger now!!! *Math. Intelligencer*, 1998, **20**(2), 38–40.

1958

1958-1

Эта задача была опубликована в статье [1] (с. 180). Сейчас, кажется, некоторые асимптотики подсчитаны даже явно (А. В. Зоричем и М. Л. Концевичем).

[1] Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. *Успехи матем. наук*, 1963, **18**(6), 91–192.

В. И. Арнольд

1959

1959-1

См. комментарий к задаче *1972-20*.

1963

1963-1

Это задача из статьи [1] (с. 179: проблема I).

[1] Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. *Успехи матем. наук*, 1963, **18**(6), 91–192.

* * *

1963-1, а также *1966-3* и *1994-33*

Согласно теории Колмогорова–Арнольда–Мозера (КАМ), в гамильтоновых системах с $1\frac{1}{2}$ или 2 степенями свободы [1], близких к интегрируемым, переменные «действие» мало меняются в течение бесконечного интервала времени (если невозмущенная интегрируемая система удовлетворяет подходящим условиям невырожденности) и лишь испытывают колебания с амплитудой порядка $\sqrt{\varepsilon}$, где $0 < \varepsilon \ll 1$ — параметр возмущения. С другой стороны, в гамильтоновых системах с $k \geqslant 2\frac{1}{2}$ степенями свободы, близких к интегрируемым, переменные «действие» I a priori могут эволюционировать: для некоторых решений разность $|I(t) - I(0)|$ может достигать больших значений (порядка 1) при больших $|t|$. В 1964 г. В. И. Арнольд [1] построил знаменитый пример аналитической гамильтоновой системы с $2\frac{1}{2}$ степенями свободы, близкой к невырожденной интегрируемой, в котором такая эволюция (получившая впоследствии название *диффузии Арнольда*) действительно имеет место. [2] Ее скорость в примере Арнольда имеет порядок $\exp(-1/\sqrt{\varepsilon})$, т. е. экспоненциально мала по параметру возмущения. Согласно теореме Нехорошева (см. комментарий к задаче *1966-2*), средняя скорость

---

[1] Напомним, что гамильтоновой системой с $n\frac{1}{2}$ степенями свободы ($n \in \mathbb{N}$) называется либо симплектоморфизм $2n$-мерного симплектического многообразия, либо неавтономная гамильтонова система дифференциальных уравнений с $2n$-мерным фазовым пространством и правыми частями, периодически зависящими от времени.

[2] См. также [2], гл. 4, § 23; с. 108–112.

диффузии в аналитических системах при выполнении соответствующих условий невырожденности и не может превышать величины порядка $\exp(-\varepsilon^{-a})$ для некоторого $a > 0$. Для систем с $n \in \mathbb{N}$ степенями свободы ($n \geqslant 3$) эта оценка справедлива с $a = \frac{1}{2n}$.

За 35 лет, истекших с момента опубликования статьи [1], явление диффузии Арнольда изучалось и обсуждалось многими авторами и исследовалось в различных численных экспериментах. Среди работ физического характера, в которых рассматривалась диффузия Арнольда и смежные вопросы эволюции в вырожденных системах, отметим статьи и книги [3–13], примерами «более математических» работ являются статьи [14–23] (из всех этих работ очень большую роль в развитии наших представлений о неустойчивости в гамильтоновых системах, близких к интегрируемым, сыграли статьи [4, 14, 17, 21, 23]). За последние годы интерес к диффузии Арнольда существенно возрос, что привело к большому числу интересных результатов и публикаций, многие из которых вызвали интенсивные дискуссии в математической периодике, на конференциях и в Интернете, см. [24–61] (этот список не претендует ни на полноту, ни на то, что все включенные в него работы правильны). Критический обзор некоторых недавних работ, посвященных диффузии Арнольда, содержится в препринте [54], см. также обзорные рефераты [62] (это реферат статьи [27]) и [63] (это реферат статьи [38]) в *Mathematical Reviews*.

Несмотря на усилия многочисленных авторов, наличие диффузии в системах *общего положения* с $k \geqslant 2\frac{1}{2}$ степенями свободы до сих пор, насколько известно автору настоящего комментария, не доказано. В частности, гипотеза, высказанная в условиях задач *1966-3* и *1994-33*, остается не доказанной и не опровергнутой, хотя в ее справедливости никто из специалистов практически не сомневается.

[1] Арнольд В. И. О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы. *ДАН СССР*, 1964, **156**(1), 9–12. [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 61–67.]

[2] Арнольд В. И., Авец А. Эргодические проблемы классической механики. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999. (Библиотека «Регулярная и хаотическая динамика», 11.) [*Французский оригинал* 1967 г.] [*Английский перевод* 1968 г.]

[3] Заславский Г. М., Чириков Б. В. Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний. *Успехи физ. наук*, 1971, **105**(1), 3–39.

[4] Chirikov B. V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Phys. Rep.*, 1979, **52**(5), 263–379.

[5] Chirikov B. V., Ford J., Vivaldi F. Some numerical studies of Arnol′d diffusion in a simple model. In: Nonlinear Dynamics and the Beam-Beam Interaction (New York, 1979). Editors: M. Month and J. C. Herrera. New York: American Institute of Physics, 1980, 323–340. (AIP Conference Proceedings, 57.)

[6] Vivaldi F. Weak instabilities in many-dimensional Hamiltonian systems. *Rev. Modern Phys.*, 1984, **56**(4), 737–754.

[7] Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.

[8] Percival I. C. Chaos in Hamiltonian systems. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 1987, **413**(1844), 131–143.

[9] Заславский Г. М., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А. Минимальный хаос, стохастическая паутина и структуры с симметрией типа «квазикристалл». *Успехи физ. наук*, 1988, **156**(2), 193–251.

[10] Заславский Г. М., Захаров М. Ю., Нейштадт А. И., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А. Многомерный гамильтоновский хаос. *Журнал эксп. теор. физ.*, 1989, **96**(5), 1563–1586.

[11] Chirikov B. V., Vecheslavov V. V. KAM integrability. In: Analysis, et cetera. Research papers published in honor of Jürgen Moser's 60th birthday. Editors: P. H. Rabinowitz and E. Zehnder. Boston, MA: Academic Press, 1990, 219–236.

[12] Заславский Г. М., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.: Наука, 1991.

[13] Lichtenberg A. J., Lieberman M. A. Regular and Chaotic Dynamics, 2nd edition. New York: Springer, 1992. [*Перевод на русский язык первого издания* 1983 г.: Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.]

[14] Нехорошев Н. Н. Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым. *Успехи матем. наук*, 1977, **32**(6), 5–66.

[15] Lieberman M. A. Arnol′d diffusion in Hamiltonian systems with three degrees of freedom. In: Nonlinear Dynamics (New York, 1979). Editor: R. H. G. Helleman. New York: New York Acad. Sci., 1980, 119–142. (Annals New York Acad. Sci., 357.)

[16] Tennyson J. L., Lieberman M. A., Lichtenberg A. J. Diffusion in near-integrable Hamiltonian systems with three degrees of freedom. In: Nonlinear Dynamics and the Beam-Beam Interaction (New York, 1979). Editors: M. Month and J. C. Herrera. New York: American Institute of Physics Press, 1980, 272–301. (AIP Conference Proceedings, 57.)

[17] Holmes P. J., Marsden J. E. Mel′nikov's method and Arnol′d diffusion for perturbations of integrable Hamiltonian systems. *J. Math. Phys.*, 1982, **23**(4), 669–675.

[18] Holmes P. J., Marsden J. E. Horseshoes and Arnol′d diffusion for Hamiltonian systems on Lie groups. *Indiana Univ. Math. J.*, 1983, **32**(2), 273–309.

[19] MacKay R. S., Meiss J. D., Percival I. C. Transport in Hamiltonian systems. *Physica D*, 1984, **13**(1–2), 55–81.

[20] MacKay R. S. Transition to chaos for area-preserving maps. In: Nonlinear Dynamics Aspects of Particle Accelerators. Editors: J. M. Jowett, M. Month and S. Turner. Berlin: Springer, 1986, 390–454. (Lecture Notes in Phys., 247.)

[21] Douady R. Stabilité ou instabilité des points fixes elliptiques. *Ann. Sci. École Norm. Sup., Sér.* 4, 1988, **21**(1), 1–46.

[22] Lochak P. Effective speed of Arnol′d's diffusion and small denominators. *Phys. Lett. A*, 1990, **143**(1–2), 39–42.

[23] Лошак П. Каноническая теория возмущений: подход, основанный на совместных приближениях. *Успехи матем. наук*, 1992, **47**(6), 59–140; поправка: 1993, **48**(1), 224.

[24] Xia Zh. Arnol′d diffusion in the elliptic restricted three-body problem. *J. Dyn. Differ. Equations*, 1993, **5**(2), 219–240.

[25] Xia Zh. Arnol′d diffusion and oscillatory solutions in the planar three-body problem. *J. Differ. Equations*, 1994, **110**(2), 289–321.

[26] Chierchia L. On the stability problem for nearly-integrable Hamiltonian systems. In: Seminar on Dynamical Systems (St. Petersburg, 1991). Editors: S. B. Kuksin, V. F. Lazutkin and J. Pöschel. Basel: Birkhäuser, 1994, 35–46.

[27] Chierchia L., Gallavotti G. Drift and diffusion in phase space. *Ann. Institut Henri Poincaré, Physique théorique*, 1994, **60**(1), 1–144; erratum: 1998, **68**(1), 135.

[28] Wood B. P., Lichtenberg A. J., Lieberman M. A. Arnol′d and Arnol′d-like diffusion in many dimensions. *Physica D*, 1994, **71**(1–2), 132–145.

[29] Lochak P. Arnol′d diffusion; a compendium of remarks and questions. Preprint, École Normale Supérieure, September 1995; In: Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom. Editor: C. Simó. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999, 168–183. (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 533.)

[30] Haller G. Diffusion at intersecting resonances in Hamiltonian systems. *Phys. Lett. A*, 1995, **200**(1), 34–42.

[31] Xia Zh. Arnol′d diffusion with degeneracies in Hamiltonian systems. In: Dynamical Systems and Chaos (Hachioji, 1994), Vol. 1: Mathematics, Engineering and Economics. Editors: N. Aoki, K. Shiraiwa and Y. Takahashi. River Edge, NJ: World Sci. Publ., 1995, 278–285.

[32] Fontich E., Martín P. Construction of some unstable symplectic maps. In: Proceedings of the 2nd Catalan Days on Applied Mathematics (Odeillo, 1995). Editors: M. Sofonea and J.-N. Corvellec. Perpignan: Presses Univ. Perpignan, 1995, 95–103.

[33] Chierchia L. Arnol′d instability for nearly-integrable analytic Hamiltonian systems. In: Variational and Local Methods in the Study of Hamiltonian Systems (Trieste, 1994). Editors: A. Ambrosetti and G. F. Dell'Antonio. River Edge, NJ: World Sci. Publ., 1995, 17–33 (also archived in `mp_arc@math.utexas.edu` # 95-96).

[34] Chierchia L. Non-degenerate 'Arnol′d diffusion'. Preprint, archived in `mp_arc@math.utexas.edu` # 96-137.

[35] Bessi U. An approach to Arnol′d's diffusion through the calculus of variations. *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.*, 1996, **26**(6), 1115–1135.

[36] Berti M. Some remarks on a variational approach to Arnol′d's diffusion. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 1996, **2**(3), 307–314.

[37] Bernard P. Perturbation d'un hamiltonien partiellement hyperbolique. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1996, **323**(2), 189–194.

[38] Moeckel R. Transition tori in the five-body problem. *J. Differ. Equations*, 1996, **129**(2), 290–314.

[39] Marco J.-P. Transition le long des chaînes de tores invariants pour les systèmes hamiltoniens analytiques. *Ann. Institut Henri Poincaré, Physique théorique*, 1996, **64**(2), 205–252.

[40] Cresson J. A λ-lemma for partially hyperbolic tori and the obstruction property. Preprint (Prépublication 114), Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), April 1997; *Lett. Math. Phys.*, 1997, **42**(4), 363–377.

[41] Bessi U. Arnol′d's diffusion with two resonances. *J. Differ. Equations*, 1997, **137**(2), 211–239.

[42] Bessi U. Arnol′d's example with three rotators. *Nonlinearity*, 1997, **10**(3), 763–781.

[43] Gallavotti G. Fast Arnol′d's diffusion in isochronous systems. Preprint, archived in `mp_arc@math.utexas.edu` # 97-481.

[44] Rudnev M., Wiggins S. On the use of the Mel′nikov integral in the Arnol′d diffusion problem. Preprint, archived in `mp_arc@math.utexas.edu` # 97-494.

[45] Gallavotti G. Hamilton–Jacobi's equation and Arnol′d's diffusion near invariant tori in a priori unstable isochronous systems. Preprint, archived in `mp_arc@math.utexas.edu` # 97-555.

[46] Chirikov B. V., Vecheslavov V. V. Arnol′d diffusion in large systems. *Журнал эксп. теор. физ.*, 1997, **112**(3), 1132–1146.

[47] Козлов В. В., Мощевитин Н. Г. О диффузии в гамильтоновых системах. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1997, № 5, 49–52.

[48] Kozlov V. V., Moshchevitin N. G. Diffusion in Hamiltonian systems. *Chaos*, 1998, **8**(1), 245–247.

[49] Gallavotti G., Gentile G., Mastropietro V. Hamilton–Jacobi equation, heteroclinic chains and Arnol′d diffusion in three time scales systems. Preprint, archived in `mp_arc@math.utexas.edu` # 98-4.

[50] Rudnev M., Wiggins S. Existence of exponentially small separatrix splittings and homoclinic connections between whiskered tori in weakly hyperbolic near-integrable Hamiltonian systems. *Physica D*, 1998, **114**(1–2), 3–80. [В реферате 99f:58175 этой статьи в *Math. Reviews*, написанном одним из авторов — М. Рудневым — указывается на «серьезную ошибку» в статье: оценка (67), ключевая для доказательства Теоремы 2.1, неверна.]

[51] Gallavotti G., Gentile G., Mastropietro V. Homoclinic splitting. Comment on a paper of Rudnev and Wiggins in print on Physica D. Preprint, archived in `mp_arc@math.utexas.edu` # 98-245.

[52] Gallavotti G., Gentile G., Mastropietro V. Homoclinic splitting, II. A possible counterexample to a claim by Rudnev and Wiggins on Physica D. Preprint, archived in `mp_arc@math.utexas.edu` # 98-281.

[53] Rudnev M., Wiggins S. Some comments on the paper "Existence of exponentially small separatrix splittings and homoclinic connections between whiskered tori in weakly hyperbolic near-integrable Hamiltonian systems". Preprint, April 1998.

[54] Lochak P. Supplement to "Arnol′d diffusion: a compendium of remarks and questions". Preprint, archived in `mp_arc@math.utexas.edu` # 98-293.

[55] Fontich E., Martín P. Arnol′d diffusion in perturbations of analytic integrable Hamiltonian systems.
Preprint, archived in `mp_arc@math.utexas.edu` # 98-319.

[56] Marco J.-P. Dynamics in the vicinity of double resonances. In: Proceedings of the IV Catalan Days of Applied Mathematics (Tarragona, 1998). Editors: C. García, C. Olivé and M. Sanromà. Tarragona: Univ. Rovira Virgili, 1998, 123–137.

[57] Perfetti P. Fixed point theorems in the Arnol′d model about instability of the action-variables in phase-space. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 1998, **4**(2), 379–391.

[58] Xia Zh. Arnol′d diffusion: a variational construction. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998). *Doc. Math.*, 1998, Extra Vol. II, 867–877 (electronic).

[59] Haller G. Fast diffusion and universality near intersecting resonances. In: Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom. Editor: C. Simó. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999, 391–397. (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 533.)

[60] Marco J.-P. Transition orbits and transition times along chains of hyperbolic tori. In: Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom. Editor: C. Simó. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999, 480–484. (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 533.)

[61] Pumariño A., Valls C. Three time scales systems exhibiting persistent Arnol′d's diffusion. Preprint, archived in `mp_arc@math.utexas.edu` # 99-311.

[62] Sevryuk M. B. Featured Review 95b:58056. *Math. Reviews*, 1995.

[63] Diacu F. N. Featured Review 97h:70014. *Math. Reviews*, 1997.

М. Б. Севрюк

1963-2

Это задача из статьи [1] (с. 179–180).

[1] Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. *Успехи матем. наук*, 1963, **18**(6), 91–192.

*   *   *

1963-2

Наличие бесконечного числа периодических орбит в любой окрестности эллиптической неподвижной точки 0 общего аналитического отображения $(\mathbb{R}^2, 0) \hookleftarrow$, сохраняющего площади, было показано еще в 1927 г. Дж. Д. Биркгофом [1] (гл. 6, §§ 1–4; с. 157–172). В 1955 г. Ю. Мозер [2] доказал, что путем сколь угодно малого изменения коэффициентов ряда Тейлора в эллиптической неподвижной точке 0 произвольного аналитического отображения $(\mathbb{R}^2, 0) \hookleftarrow$, сохраняющего площади, можно получить сохраняющий площади аналитический диффеоморфизм, имеющий в любой окрестности точки 0 бесконечно много *изолированных* — гиперболических и эллиптических — периодических орбит.

Полное решение задачи было дано в 1973 г. Э. Цендером [3]. Он доказал, что диффеоморфизмы, имеющие в любой окрестности точки 0 бесконечно много гомоклинических точек, образуют остаточное в смысле Бэра множество в (наделенном некоторой естественной топологией) пространстве сохраняющих площади отображений $(\mathbb{R}^2, 0) \hookleftarrow$ произвольной фиксированной гладкости C^r, $1 \leqslant r \leqslant \omega$, с эллиптической неподвижной точкой 0. Напомним, что *гомоклиническая* точка — это точка *трансверсального* пересечения устойчивой $W^s(p)$ и неустойчивой $W^u(q)$ сепаратрис гиперболических периодических точек p и q, принадлежащих одной и той же орбите рассматриваемого отображения. Наличие гомоклинических точек в точности означает расщепление сепаратрис. Напомним также, что подмножество топологического пространства называется *остаточным* (*residual*) по Бэру, если оно содержит счетное пересечение открытых всюду плотных множеств, а про элементы такого подмножества говорят, что они *типичны* (*generic*) по Бэру. Неравенство $1 \leqslant r \leqslant \omega$ включает случаи $r \in \mathbb{N}$, $r = \infty$ и $r = \omega$ (C^ω означает вещественную аналитичность).

В статье [4] результат Цендера был перенесен на пространства сохраняющих площади аналитических отображений $(\mathbb{R}^2, 0) \hookleftarrow$ с *заранее заданными* собственными числами линеаризации $e^{\pm 2\pi i \alpha}$ в эллиптической неподвижной точке 0. В этой же статье получен и аналогичный результат для диффеоморфизмов, имеющих в любой окрестности точки 0 т. н. невырожденные кантороторы (множества Обри–Мазера).

Из обзорных работ по рассматриваемой тематике отметим книгу [5] (особенно Ch. III, § 6; p. 99–107) и статью [6].

[1] Биркгоф Дж. Д. Динамические системы, изд. 2-е. Пер. с англ. Е. М. Ливенсона под ред. А. А. Маркова, В. В. Немыцкого и В. В. Степанова. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. (Библиотека «Регулярная и хаотическая динамика», 8.) [*Английский оригинал* 1927 г.] [*Первое издание на русском языке* 1941 г.]

[2] Moser J. Nonexistence of integrals for canonical systems of differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1955, **8**(3), 409–436.

[3] Zehnder E. Homoclinic points near elliptic fixed points. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1973, **26**(2), 131–182.

[4] Genecand C. Transversal homoclinic orbits near elliptic fixed points of area-preserving diffeomorphisms of the plane. In: Dynamics Reported. Expositions in Dynamical Systems, V. 2. Editors: C. K. R. T. Jones, U. Kirchgraber and H.-O. Walther. Berlin: Springer, 1993, 1–30. (Dynam. Report.: Expos. Dynam. Syst., N. S., 2.)

[5] Moser J. Stable and Random Motions in Dynamical Systems, with Special Emphasis on Celestial Mechanics. Princeton: Princeton Univ. Press, 1973. (Ann. Math. Studies, 77.)

[6] Chenciner A. La dynamique au voisinage d'un point fixe elliptique conservatif: de Poincaré et Birkhoff à Aubry et Mather. In: *Séminaire Bourbaki*, 1983–84, **622**; *Astérisque*, 1985, **121–122**, 147–170.

М. Б. Севрюк

1963-3

Это задача из статьи [1] (с. 180: проблема II).

[1] Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. *Успехи матем. наук*, 1963, **18**(6), 91–192.

* * *

1963-3

Величина возмущения, допускаемая строгими (как говорят, «аналитическими») доказательствами различных теорем теории КАМ, как правило, очень мала — обычно она на порядки меньше, чем настоящий порог возмущения μ_* (который может быть найден численно или путем комбинации компьютерных расчетов и «аналитических» рассуждений), выше которого большинство инвариантных торов разрушаются, см., например, [1–11]. Это обстоятельство иногда позволяет утверждать, что теория КАМ не очень приспособлена для практических целей [2, 12], и даже говорить о ее «численной неадекватности» ("numerical inadequacies" [2], p. 135). В работах В. И. Арнольда [13–14] ограниченные движения в планетных системах построены для того случая, когда массы и эксцентриситеты планет достаточно малы. В [12] подчеркивается (p. 13): «Что касается Солнечной системы, В. И. Арнольд [14] показал преобладание квазипериодических движений — для планет размера теннисного мяча. Строго говоря, вопрос об устойчивости до сих пор открыт».

Апология теории КАМ с этой точки зрения содержится, например, в [15], Section 2.7 (ср. также, например, [16], § 1.2). Одним из важнейших выводов теории КАМ является то, что в фазовом пространстве гамильтоновой системы общего вида с n степенями свободы могут встречаться канторовы семейства инвариантных торов разных размерностей $2 \leqslant m \leqslant n$, причем $2m$-мерная мера Хаусдорфа (мера Лебега при $m = n$) объединения этих торов положительна. Для существования таких семейств торов не нужно никакой интегрируемости, никаких специальных симметрий, никаких условий «типа равенства». Грубо говоря, наличие семейств инвариантных торов с квазипериодическим потоком на них — это свойство «коразмерности нуль» (и, в частности, гипотеза об эргодичности общей гамильтоновой системы на гиперповерхностях уровня энергии, широко распространенная в физической литературе вплоть до 60-х гг., неверна, ср. [17]). Такое утверждение *принципиально невозможно* доказать никаким компьютерным счетом. Конечно, часто легко выявить инвариантные торы в данной системе численно, но при этом нельзя гарантировать, что найденные инвариантные многообразия — не артефакты, что, например, переменные «действие», отвечающие начальной точке на таком торе, действительно сохраняются *вечно*, а не просто очень-очень долго. А для установления «типичности» семейств торов *совершенно безразлична* оценка величины возмущения μ_*, при которой еще выживает много инвариантных торов исходной интегрируемой системы, — важно лишь, что $\mu_* > 0$.

С другой стороны, если мы уже знаем, что существование семейств инвариантных торов является свойством «коразмерности нуль», то ответы на все количественные вопросы, вроде настоящей оценки μ_*, удобнее и целесообразнее искать численно.

Сценарий разрушения инвариантного тора с данным набором частот при росте возмущения весьма сложен и включает в себя, например, потерю этим тором гладкости и его превращение в т. н. канторотор. Кроме статей [1–11], мы приведем здесь лишь несколько обзоров [18–24], в которых рассматривается разрушение инвариантных торов и нарастание хаотичности в гамильтоновых системах.

[1] Greene J. M. A method for determining a stochastic transition. *J. Math. Phys.*, 1979, **20**(6), 1183–1201.

[2] Percival I. C. Chaos in Hamiltonian systems. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 1987, **413**(1844), 131 143.

[3] Celletti A., Falcolini C., Porzio A. Rigorous numerical stability estimates for the existence of KAM tori in a forced pendulum. *Ann. Institut Henri Poincaré, Physique théorique*, 1987, **47**(1), 85–111.

[4] Celletti A., Falcolini C., Porzio A. Rigorous KAM stability statements for nonautonomous one-dimensional Hamiltonian systems. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, 1987, **45**(1), 43–70.

[5] Celletti A., Chierchia L. Rigorous estimates for a computer-assisted KAM theory. *J. Math. Phys.*, 1987, **28**(9), 2078–2086.

[6] Celletti A., Chierchia L. Construction of analytic KAM surfaces and effective stability bounds. *Commun. Math. Phys.*, 1988, **118**(1), 119–161.

[7] Celletti A., Chierchia L. A constructive theory of Lagrangian tori and computer-assisted applications. In: Dynamics Reported. Expositions in Dynamical Systems, V. 4. Editors: C. K. R. T. Jones, U. Kirchgraber and H.-O. Walther. Berlin: Springer, 1995, 60–129. (Dynam. Report.: Expos. Dynam. Syst., N. S., 4.)

[8] Celletti A., Froeschlé C. On the determination of the stochasticity threshold of invariant curves. *Intern. J. Bifurcation and Chaos*, 1995, **5**(6), 1713–1719.

[9] Chandre C., Govin M., Jauslin H. R. Kolmogorov–Arnol′d–Moser renormalization-group approach to the breakup of invariant tori in Hamiltonian systems. *Phys. Rev. E, Ser.* 3, 1998, **57**(2), part A, 1536–1543.

[10] Abad J. J., Koch H., Wittwer P. A renormalization group for Hamiltonians: numerical results. *Nonlinearity*, 1998, **11**(5), 1185–1194.

[11] Koch H. A renormalization group for Hamiltonians, with applications to KAM tori. *Ergod. Theory Dynam. Syst.*, 1999, **19**(2), 475–521.

[12] Pöschel J. On small divisors with spatial structure. Habilitationsschrift, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität, Bonn, 1989.

[13] Арнольд В. И. О классической теории возмущений и проблеме устойчивости планетных систем. *ДАН СССР*, 1962, **145**(3), 487–490. [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 39–45.]

[14] Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. *Успехи матем. наук*, 1963, **18**(6), 91–192; поправка: 1968, **23**(6), 216.

[15] Broer H. W., Huitema G. B., Sevryuk M. B. Quasi-Periodic Motions in Families of Dynamical Systems: Order amidst Chaos. Berlin: Springer, 1996. (Lecture Notes in Math., 1645.)

[16] Broer H. W., Dumortier F., van Strien S. J., Takens F. Structures in Dynamics (Finite Dimensional Deterministic Studies). Amsterdam: North-Holland, Elsevier, 1991. (Studies Math. Phys., 2.)

[17] Markus L., Meyer K. R. Generic Hamiltonian dynamical systems are neither integrable nor ergodic. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1974, **144**, 1–52.

[18] MacKay R. S., Meiss J. D., Percival I. C. Transport in Hamiltonian systems. *Physica D*, 1984, **13**(1–2), 55–81.

[19] MacKay R. S., Percival I. C. Converse KAM: theory and practice. *Commun. Math. Phys.*, 1985, **98**(4), 469–512.

[20] Chenciner A. La dynamique au voisinage d'un point fixe elliptique conservatif: de Poincaré et Birkhoff à Aubry et Mather. In: *Séminaire Bourbaki*, 1983–84, **622**; *Astérisque*, 1985, **121–122**, 147–170.

[21] MacKay R. S. Transition to chaos for area-preserving maps. In: Nonlinear Dynamics Aspects of Particle Accelerators. Editors: J. M. Jowett, M. Month and S. Turner. Berlin: Springer, 1986, 390–454. (Lecture Notes in Phys., 247.)

[22] Meiss J. D. Symplectic maps, variational principles, and transport. *Rev. Modern Phys.*, 1992, **64**(3), 795–848.

[23] MacKay R. S. Renormalisation in Area-Preserving Maps. River Edge, NJ: World Sci. Publ., 1993.

[24] Mather J. N., Forni G. Action minimizing orbits in Hamiltonian systems. In: Transition to Chaos in Classical and Quantum Mechanics. Editor: S. Graffi. Berlin: Springer, 1994, 92–186. (Lecture Notes in Math., 1589.)

М. Б. Севрюк

1963-4

Это задача из статьи [1] (с. 180–181: проблема III).

[1] Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. *Успехи матем. наук*, 1963, **18**(6), 91–192.

См. комментарий к задаче *1972-20*.

1963-5

Это задача из статьи [1] (с. 181–182: проблема IV).

[1] Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. *Успехи матем. наук*, 1963, **18**(6), 91–192.

См. комментарий к задаче *1972-21*.

1963-6

Это задача из статьи [1а] (§ 4, 1°; см. также [1б], с. 52).

[1а] Арнольд В. И., Крылов А. Л. Равномерное распределение точек на сфере и некоторые эргодические свойства решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области. *ДАН СССР*, 1963, **148**(1), 9–12.

Перепечатано в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 47–53.

1963-7

Это задача из статьи [1а] (§ 4, 2°; см. также [1б], с. 52).

[1а] Арнольд В. И., Крылов А. Л. Равномерное распределение точек на сфере и некоторые эргодические свойства решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области. *ДАН СССР*, 1963, **148**(1), 9–12.

Перепечатано в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 47–53.

1963-8

Это задача из статьи [1а] (§ 4, 3°; см. также [1б], с. 52).

[1а] Арнольд В. И., Крылов А. Л. Равномерное распределение точек на сфере и некоторые эргодические свойства решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области. *ДАН СССР*, 1963, **148**(1), 9–12.

Перепечатано в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 47–53.

1963-9

Это задача из статьи [1а] (§ 4, 4°; см. также [1б], с. 52).

[1а] Арнольд В. И., Крылов А. Л. Равномерное распределение точек на сфере и некоторые эргодические свойства решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области. *ДАН СССР*, 1963, **148**(1), 9–12.

Перепечатано в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 47–53.

1963-10

Это задача из статьи [1а] (§ 4, 5°; см. также [1б], с. 52).

[1а] Арнольд В. И., Крылов А. Л. Равномерное распределение точек на сфере и некоторые эргодические свойства решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области. *ДАН СССР*, 1963, **148**(1), 9–12.

Перепечатано в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 47–53.

1963-11

Это задача из статьи [1а] (§ 4, 6°; см. также [1б], с. 53).

[1а] Арнольд В. И., Крылов А. Л. Равномерное распределение точек на сфере и некоторые эргодические свойства решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области. *ДАН СССР*, 1963, **148**(1), 9–12.

Перепечатано в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 47–53.

1963-12

Это задача из статьи [1а] (§ 4, 7°; см. также [1б], с. 53).

[1а] Арнольд В. И., Крылов А. Л. Равномерное распределение точек на сфере и некоторые эргодические свойства решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области. *ДАН СССР*, 1963, **148**(1), 9–12.

Перепечатано в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 47–53.

1965

1965-1

Это задача из статьи [1a] (Remarque A; см. также [1б], с. 85: Замечание A).

[1a] Arnol′d V. I. Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1965, **261**(19), 3719–3722.

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 81–86.

См. комментарий к задаче *1983-3*.

1965-2

Это задача из статьи [1a] (Remarque C; см. также [1б], с. 85: Замечание C).

[1a] Arnol′d V. I. Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1965, **261**(19), 3719–3722.

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 81–86.

См. комментарий к задаче *1983-3*.

1965-3

Это задача из статьи [1a] (Remarque D; см. также [1б], с. 86: Замечание D).

[1a] Arnol′d V. I. Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1965, **261**(19), 3719–3722.

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 81–86.

1966

1966-1

Это задача из статьи [1а] (§ 1, проблема 1; см. также [1б], с. 96).

[1а] Арнольд В. И. Проблема устойчивости и эргодические свойства классических динамических систем. В кн.: Труды Международного конгресса математиков (Москва, 1966). М.: Мир, 1968, 387–392.

Перепечатано в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 95–101.

См. комментарии к задачам *1972-9* и *1972-10*.

1966-2

Это задача из статьи [1а] (§ 2, проблема 2; см. также [1б], с. 97).

[1а] Арнольд В. И. Проблема устойчивости и эргодические свойства классических динамических систем. В кн.: Труды Международного конгресса математиков (Москва, 1966). М.: Мир, 1968, 387–392.

Перепечатано в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 95–101.

* * *

1966-2

В *аналитических* гамильтоновых системах, близких к интегрируемым, эволюция переменных «действие» в общем случае отсутствует в любом порядке теории возмущений и, более того, *экспоненциально мала* по параметру возмущения. Этот результат составляет содержание знаменитой *теоремы Нехорошева* [1–4] и иногда называется *эффективной устойчивостью* переменных «действие» (ср. [5–9]). Более точно эта теорема формулируется следующим образом. Рассмотрим гамильтонову систему с n степенями свободы и аналитическим гамильтонианом

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi, \varepsilon), \qquad (1)$$

где $(I,\varphi) \in G \times \mathbb{T}^n$ — переменные «действие–угол» (G — некоторая область в $\mathbb{R}^n$), а $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$ — параметр возмущения. Предположим, что невозмущенная функция Гамильтона $H_0(I)$ удовлетворяет некоторым условиям невырожденности, называемым *крутизной*. Тогда существуют такие положительные константы a, b, R_*, K_* и ε_*, что для любого решения $\varphi(t)$, $I(t)$ гамильтоновой системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \omega(I) + \varepsilon\frac{\partial H_1(I,\varphi,\varepsilon)}{\partial I}, \qquad \omega(I) := \frac{\partial H_0(I)}{\partial I}, \\ \frac{dI}{dt} &= -\varepsilon\frac{\partial H_1(I,\varphi,\varepsilon)}{\partial \varphi}, \end{aligned} \tag{2}$$

отвечающей гамильтониану (1), выполнено неравенство

$$|I(t) - I(0)| \leqslant R_*\varepsilon^b \quad \text{при} \quad |t| \leqslant \exp(K_*\varepsilon^{-a}), \tag{3}$$

если только $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$.

Постоянные a и b в неравенстве (3) называются *показателями устойчивости*, из них наиболее важным является показатель a. Эти показатели зависят от числа степеней свободы n и т. н. *показателей крутизны* функции $H_0(I)$ и стремятся к нулю при $n \to \infty$. Величина $\mathcal{T}(\varepsilon) = \exp(K_*\varepsilon^{-a})$ обычно называется *временем устойчивости*, расстояние $R(\varepsilon) = R_*\varepsilon^b$ — *радиусом удержания*, а константа ε_* — *порогом применимости*.

Эта теорема была анонсирована Н. Н. Нехорошевым [1] в 1971 г. Полное доказательство было дано в статьях [2–3]. В работах Нехорошева показатель a имел асимптотику const/n^2. В середине 80-х гг. Дж. Бенеттин, Л. Галгани, Дж. Галлавотти и А. Джорджилли [10–12] более подробно исследовали случай *выпуклых* функций $H_0(I)$ (см. ниже). В 1993 г. Ю. Пёшель [13] для *квазивыпуклых* функций $H_0(I)$ (см. ниже) получил значение $a = 1/(2n)$. С другой стороны, П. Лошак [14] в 1992 г. опубликовал принципиально новое доказательство теоремы Нехорошева для квазивыпуклых невозмущенных функций Гамильтона (см. также [15–17]). В работах А. Дельшамса и П. Гутьерреса [8, 18] теорема Колмогорова о сохранении инвариантных торов и теорема Нехорошева доказаны параллельно.

Условие крутизны является очень слабым: некрутые функции $H_0(I)$ образуют множество бесконечной коразмерности в подходящем функциональном пространстве [2, 19]. Точное определение и/или подробное обсуждение свойства крутизны можно найти в работах Нехорошева [1–4, 19]. Ю. С. Ильяшенко [20] получил следующее достаточное условие крутизны:

Теорема [20]. *Пусть невозмущенная аналитическая функция Гамильтона $H_0(I)$ определена в некоторой окрестности замыкания ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^n$. Пусть H_0 не имеет критических точек и ограничение H_0 на любое аффинное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$ любой размерности от 1 до $n-1$ имеет лишь $\mathbb{C}$-изолированные критические точки. Тогда функция H_0 крутая в G.*

Точные значения показателей крутизны в настоящее время вычислены только для типичных функций $H_0(I)$ в случае двух и трех степеней свободы [21] (см. комментарий к задаче *1978-3*).

Из всех крутых функций $H_0(I)$ «самыми крутыми» являются выпуклые и квазивыпуклые функции.

Определение. Невозмущенная функция Гамильтона $H_0(I)$, для которой вектор частот $\omega(I) = \partial H_0(I)/\partial I$ нигде не обращается в ноль, называется *выпуклой*, если существует такая константа $c > 0$, что

$$\left\langle \eta,\ \frac{\partial \omega(I)}{\partial I}\eta \right\rangle \geqslant c|\eta|^2 \tag{4}$$

при всех $I \in \overline{G}$ и $\eta \in \mathbb{R}^n$ (угловые скобки здесь обозначают скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$). Функция $H_0(I)$ называется *квазивыпуклой*, если существует такая константа $c > 0$, что неравенство (4) выполнено при всех $I \in \overline{G}$ и $\eta \in \mathbb{R}^n$, для которых $\langle \omega(I), \eta \rangle = 0$.

Легко проверить, что квазивыпуклость функции H_0 означает выпуклость ее гиперповерхностей уровня $\{H_0 = \mathrm{const}\}$.

Для квазивыпуклых невозмущенных функций Гамильтона оценка Нехорошева (3) справедлива для $a = b = 1/(2n)$ [8, 13, 15–18]. Более того, для любого $0 < \mu \leqslant 1$ можно взять [13, 16]

$$a = \frac{\mu}{2n}, \qquad b = \frac{1-\mu}{2} + \frac{\mu}{2n}.$$

По-видимому, эти значения показателей устойчивости являются оптимальными. На «физическом уровне строгости» значение $a \approx 1/(2n)$

было получено еще в 1979 г. в работе [22]. С другой стороны, вблизи *резонансных* невозмущенных торов оценки показателей устойчивости a и b могут быть существенно улучшены [14, 16] (ср. также [13, 15, 17]).

Для некрутых невозмущенных функций Гамильтона эволюция переменных «действие» I в системе (2) может происходить со скоростью $\sim \varepsilon$ [2]. Однако экспоненциальные оценки скорости эволюции переменных «действие» иногда могут быть получены и для очень вырожденных (даже линейных) функций $H_0(I)$, если возмущение «снимает» вырождение [23]. Точнее, в [23] рассматриваются гамильтонианы (1) вида $H(I,\varphi,\varepsilon) = H_0(I) + \varepsilon H_{1,1}(I) + \varepsilon^2 H_{1,2}(I,\varphi)$ с линейной функцией $H_0(I)$ и выпуклой функцией $H_{1,1}(I)$. Экспоненциальная оценка скорости эволюции переменных I для линейной функции $H_0(I) = \langle \omega_0, I\rangle$ имеет место и тогда, когда возмущение произвольно, но постоянный вектор частот ω_0 диофантов [5–6, 12].

Получение экспоненциальных оценок скорости эволюции переменных «действие» в случае вырожденных невозмущенных функций Гамильтона особенно важно для задач небесной механики. Из многочисленных недавних работ, посвященных применению различных аналогов теоремы Нехорошева для исследования устойчивости Солнечной системы, отметим [9, 24–34]. В статьях [24–25] использовался метод Лошака.

Некоторое уточнение оценок оригинальных работ Нехорошева [1–3] было получено в препринтах [35–36].

Другим аспектом эффективного отсутствия эволюции переменных «действие» в гамильтоновых системах, близких к интегрируемым, является т. н. *сверхэкспоненциальная «липкость»* (“stickiness”) колмогоровских торов, открытая А. Морбиделли и А. Джорджилли [37] в 1995 г. Оказывается, что (в случае квазивыпуклых невозмущенных функций Гамильтона) все траектории возмущенной системы, начинающиеся на расстоянии $0 < \rho \leqslant \rho_*$ от колмогоровского тора с диофантовым набором частот, остаются вблизи этого тора в течение чрезвычайно длительного времени порядка

$$\exp\left\{\exp\left[\left(\frac{\rho_*}{\rho}\right)^r\right]\right\},$$

если ε достаточно мало. Здесь $\rho_* > 0$ — некоторая не зависящая от ε константа, а $r > 0$ — постоянная, определяемая арифметическими свойствами набора частот рассматриваемого тора. Заметим, что роль малого параметра здесь играет не величина возмущения, а начальное расстояние до инвариантного тора.

В более ранних работах [38–39], посвященных «липкости» колмогоровских торов, была получена лишь экспоненциальная оценка «времени удержания». В статьях [40–43] А. Морбиделли и А. Джорджилли установили наличие в фазовом пространстве $\mathcal{G} = G \times \mathbb{T}^n$ гамильтоновой системы, близкой к интегрируемой, иерархии вложенных областей $\{\mathcal{G}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ с возрастающими характеристиками устойчивости. Экспоненциальная липкость инвариантных торов размерностей, меньших числа степеней свободы, получена в работах [5, 42, 44–47].

Теорема Нехорошева переносится mutatis mutandis на *бесконечномерные* гамильтоновы системы. Мы здесь ограничимся тем, что укажем несколько важнейших ссылок: [48–54].

[1] Нехорошев Н. Н. О поведении гамильтоновых систем, близких к интегрируемым. *Функц. анализ и его прилож.*, 1971, **5**(4), 82–83.

[2] Нехорошев Н. Н. Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым. *Успехи матем. наук*, 1977, **32**(6), 5–66.

[3] Нехорошев Н. Н. Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым. II. *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, 1979, **5**, 5–50.

[4] Нехорошев Н. Н. Метод последовательных канонических замен переменных. Добавление к кн.: Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973, 150–164.

[5] Giorgilli A., Delshams A., Fontich E., Galgani L., Simó C. Effective stability for a Hamiltonian system near an elliptic equilibrium point, with an application to the restricted three body problem. *J. Differ. Equations*, 1989, **77**(1), 167–198.

[6] Delshams A., Gutiérrez P. Effective stability for nearly integrable Hamiltonian systems. In: Proceedings of Intern. Conf. on Differential Equations (*Equa*$\frac{\partial i}{\partial t}$*ff 91*) (Barcelona, 1991), Vol. 1. Editors: C. Perelló, C. Simó and J. Solà-Morales. Singapore: World Scientific, 1993, 415–420.

[7] Jorba À., Simó C. Effective stability for periodically perturbed Hamiltonian systems. In: Hamiltonian Mechanics: Integrability and Chaotic Behavior (Toruń, 1993). Editor: J. Seimenis. New York: Plenum Press, 1994, 245–252. (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., 331.)

[8] Delshams A., Gutiérrez P. Effective stability and KAM theory. *J. Differ. Equations*, 1996, **128**(2), 415–490.

[9] Jorba À., Villanueva J. Effective stability around periodic orbits of the spatial RTBP. In: Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom. Editor: C. Simó. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999, 628–632. (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 533.)

[10] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A. A proof of Nekhoroshev's theorem for the stability times in nearly integrable Hamiltonian systems. *Celest. Mech.*, 1985, **37**(1), 1–25.

[11] Giorgilli A., Galgani L. Rigorous estimates for the series expansions of Hamiltonian perturbation theory. *Celest. Mech.*, 1985, **37**(2), 95–112.

[12] Benettin G., Gallavotti G. Stability of motions near resonances in quasi-integrable Hamiltonian systems. *J. Stat. Phys.*, 1986, **44**(3–4), 293–338.

[13] Pöschel J. Nekhoroshev estimates for quasi-convex Hamiltonian systems. *Math. Z.*, 1993, **213**(2), 187–216.

[14] Лошак П. Каноническая теория возмущений: подход, основанный на совместных приближениях. *Успехи матем. наук*, 1992, **47**(6), 59–140; поправка: 1993, **48**(1), 224.

[15] Lochak P., Neĭshtadt A. I. Estimates of stability time for nearly integrable systems with a quasiconvex Hamiltonian. *Chaos*, 1992, **2**(4), 495–499.

[16] Lochak P. Hamiltonian perturbation theory: periodic orbits, resonances and intermittency. *Nonlinearity*, 1993, **6**(6), 885–904.

[17] Lochak P., Neĭshtadt A. I., Niederman L. Stability of nearly integrable convex Hamiltonian systems over exponentially long times. In: Seminar on Dynamical Systems (St. Petersburg, 1991). Editors: S. B. Kuksin, V. F. Lazutkin and J. Pöschel. Basel: Birkhäuser, 1994, 15–34.

[18] Delshams A., Gutiérrez P. Nekhoroshev and KAM theorems revisited via a unified approach. In: Hamiltonian Mechanics: Integrability and Chaotic Behavior (Toruń, 1993). Editor: J. Seimenis. New York: Plenum Press, 1994, 299–306. (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., 331.)

[19] Нехорошев Н. Н. Устойчивые оценки снизу для гладких отображений и для градиентов гладких функций. *Матем. сборник*, 1973, **90**(3), 432–478.

[20] Ильяшенко Ю. С. Признак крутизны для аналитических функций. *Успехи матем. наук*, 1986, **41**(1), 193–194.

[21] Ландис Е. Е. Равномерные показатели крутизны. *Успехи матем. наук*, 1986, **41**(4), 179.

[22] Chirikov B. V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Phys. Rep.*, 1979, **52**(5), 263–379.

[23] Lochak P. Stability of Hamiltonian systems over exponentially long times: the near-linear case. In: Hamiltonian Dynamical Systems: History, Theory, and Applications (Cincinnati, 1992). Editors: H. S. Dumas, K. R. Meyer and D. S. Schmidt. New York: Springer, 1995, 221–229. (The IMA Volumes in Math. and Appl., 63.)

[24] Niederman L. Stability over exponentially long times in the planetary problem. In: From Newton to Chaos: Modern Techniques for Understanding and Coping with Chaos in N-body Dynamical Systems (Cortina d'Ampezzo, 1993). Editors: A. E. Roy and B. A. Steves. New York: Plenum Press, 1995, 109–118. (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., 336.)

[25] Niederman L. Stability over exponentially long times in the planetary problem. *Nonlinearity*, 1996, **9**(6), 1703–1751.

[26] Celletti A., Ferrara L. An application of the Nekhoroshev theorem to the restricted three-body problem. *Celest. Mech. Dynam. Astronom.*, 1996, **64**(3), 261–272.

[27] Celletti A., Chierchia L. On the stability of realistic three-body problems. *Commun. Math. Phys.*, 1997, **186**(2), 413–449.

[28] Morbidelli A., Guzzo M. The Nekhoroshev theorem and the asteroid belt dynamical system. *Celest. Mech. Dynam. Astronom.*, 1996/97, **65**(1–2), 107–136.

[29] Guzzo M., Morbidelli A. Construction of a Nekhoroshev like result for the asteroid belt dynamical system. *Celest. Mech. Dynam. Astronom.*, 1996/97, **66**(3), 255–292.

[30] Giorgilli A., Skokos Ch. On the stability of the Trojan asteroids. *Astron. Astrophys.*, 1997, **317**, 254–261.

[31] Steichen D., Giorgilli A. Long time stability for the main problem of artificial satellites. *Celest. Mech. Dynam. Astronom.*, 1997/98, **69**(3), 317–330.

[32] Jorba À., Villanueva J. Numerical computation of normal forms around some periodic orbits of the restricted three-body problem. *Physica D*, 1998, **114**(3–4), 197–229.

[33] Benettin G., Fassò F., Guzzo M. Nekhoroshev-stability of L_4 and L_5 in the spatial restricted three-body problem. *Reg. Chaot. Dynamics*, 1998, **3**(3), 56–72.

[34] Guzzo M. Nekhoroshev stability of quasi-integrable degenerate Hamiltonian systems. *Reg. Chaot. Dynamics*, 1999, **4**(2), 78–102.

[35] Росиков Ю. В. Нормализация возмущенной системы уравнений Гамильтона в резонансном случае. Препринт Ин-та космических исследований РАН, 1994, № 1892, 37 с.

[36] Росиков Ю. В. Уточнение экспоненциальной оценки времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым. Препринт Ин-та космических исследований РАН, 1994, № 1893, 34 с.

[37] Morbidelli A., Giorgilli A. Superexponential stability of KAM tori. *J. Stat. Phys.*, 1995, **78**(5–6), 1607–1617.

[38] Morbidelli A., Giorgilli A. Quantitative perturbation theory by successive elimination of harmonics. *Celest. Mech. Dynam. Astronom.*, 1993, **55**(2), 131–159.

[39] Perry A. D., Wiggins S. KAM tori are very sticky: rigorous lower bounds on the time to move away from an invariant Lagrangian torus with linear flow. *Physica D*, 1994, **71**(1–2), 102–121.

[40] Morbidelli A., Giorgilli A. On a connection between KAM and Nekhoroshev's theorems. *Physica D*, 1995, **86**(3), 514–516.

[41] Giorgilli A., Morbidelli A. Invariant KAM tori and global stability for Hamiltonian systems. *Z. Angew. Math. Phys.*, 1997, **48**(1), 102–134.

[42] Giorgilli A. On the problem of stability for near to integrable Hamiltonian systems. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III (Berlin, 1998). *Doc. Math.*, 1998, Extra Vol. III, 143–152 (electronic).

[43] Morbidelli A. Bounds on diffusion in phase space: connection between Nekhoroshev and KAM theorems and superexponential stability of invariant tori. In: Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom. Editor: C. Simó. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999, 514–517. (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 533.)

[44] Jorba À., Villanueva J. On the normal behaviour of partially elliptic lower-dimensional tori of Hamiltonian systems. *Nonlinearity*, 1997, **10**(4), 783–822.

[45] Fassò F., Guzzo M., Benettin G. Nekhoroshev-stability of elliptic equilibria of Hamiltonian systems. *Commun. Math. Phys.*, 1998, **197**(2), 347–360.

[46] Guzzo M., Fassò F., Benettin G. On the stability of elliptic equilibria. *Math. Phys. Electron. J.*, 1998, **4**, Paper 1, 16 pp. (electronic).

[47] Niederman L. Nonlinear stability around an elliptic equilibrium point in a Hamiltonian system. *Nonlinearity*, 1998, **11**(6), 1465–1479.

[48] Benettin G., Fröhlich J., Giorgilli A. A Nekhoroshev-type theorem for Hamiltonian systems with infinitely many degrees of freedom. *Commun. Math. Phys.*, 1988, **119**(1), 95–108.

[49] Bambusi D., Giorgilli A. Exponential stability of states close to resonance in infinite-dimensional Hamiltonian systems. *J. Stat. Phys.*, 1993, **71**(3–4), 569–606.

[50] Bambusi D. A Nekhoroshev-type theorem for the Pauli–Fierz model of classical electrodynamics. *Ann. Institut Henri Poincaré, Physique théorique*, 1994, **60**(3), 339–371.

[51] Giorgilli A. Energy equipartition and Nekhoroshev-type estimates for large systems. In: Hamiltonian Dynamical Systems: History, Theory, and Applications (Cincinnati, 1992). Editors: H. S. Dumas, K. R. Meyer and D. S. Schmidt. New York: Springer, 1995, 147–161. (The IMA Volumes in Math. and Appl., 63.)

[52] Bambusi D. Exponential stability of breathers in Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators. *Nonlinearity*, 1996, **9**(2), 433–457.

[53] Bambusi D., Nekhoroshev N. N. A property of exponential stability in nonlinear wave equations near the fundamental linear mode. *Physica D*, 1998, **122**(1–4), 73–104.

[54] Нехорошев Н. Н. Экспоненциальная устойчивость приближенной основной моды нелинейного волнового уравнения. *Функц. анализ и его прилож.*, 1999, **33**(1), 80–83.

М. Б. Севрюк

1966-3

Это задача из статьи [1а] (§ 3, гипотеза; см. также [1б], с. 98).

[1а] Арнольд В. И. Проблема устойчивости и эргодические свойства классических динамических систем. В кн.: Труды Международного конгресса математиков (Москва, 1966). М.: Мир, 1968, 387–392.

Перепечатано в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 95–101.

См. комментарий к задаче *1963-1.*

1966-4

Это задача из статьи [1а] (§ 4; см. также [1б], с. 99).

[1а] Арнольд В. И. Проблема устойчивости и эргодические свойства классических динамических систем. В кн.: Труды Международного конгресса математиков (Москва, 1966). М.: Мир, 1968, 387–392.

Перепечатано в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 95–101.

См. комментарий к задаче *1983-3.*

1966-5

Это задача из статьи [1а] (§ 4; см. также [1б], с. 99).

[1а] Арнольд В. И. Проблема устойчивости и эргодические свойства классических динамических систем. В кн.: Труды Международного конгресса математиков (Москва, 1966). М.: Мир, 1968, 387–392.

Перепечатано в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 95–101.

1966-6

Это задача из статьи [1а] (§ 4, проблема; см. также [1б], с. 100).

[1а] Арнольд В. И. Проблема устойчивости и эргодические свойства классических динамических систем. В кн.: Труды Международного конгресса математиков (Москва, 1966). М.: Мир, 1968, 387–392.

Перепечатано в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 95–101.

1969

1969-1

Инвариантность объема любого многогранника при его изгибании доказана в работе [1] (идея доказательства принадлежит И. Х. Сабитову, ранее доказавшему указанную гипотезу для многогранников, гомеоморфных сфере [2]).

В том же номере журнала *Beiträge* ... имеется статья В. А. Александрова [3], где приведен контрпример к аналогичному утверждению в сферическом пространстве.

[1] Connelly R., Sabitov I., Walz A. The bellows conjecture. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, 1997, **38**(1), 1–10.

[2] Сабитов И. Х. К проблеме об инвариантности объема изгибаемого многогранника. *Успехи матем. наук*, 1995, **50**(2), 223–224.

[3] Alcksandrov V. A. An example of a flexible polyhedron with nonconstant volume in the spherical space. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, 1997, **38**(1), 11–18.

В. Д. Седых

1969-2

См. комментарий к задаче *1998-5*.

1970

1970-1

Для любой пары (M, G), где M — многообразие, а G — действующая на этом многообразии группа Ли, можно определить понятие *версальной деформации* произвольного элемента $m \in M$ относительно действия группы G. В задаче речь идет о простейшем (но чрезвычайно важном) случае, когда M — подмножество пространства $\mathrm{gl}(N, \mathbb{D}) = \mathbb{D}^{N^2}$ матриц порядка N над телом $\mathbb{D}$, а G — подгруппа группы $\mathrm{GL}(N, \mathbb{D})$ невырожденных матриц порядка N (предполагается, что G действует сопряжением и оставляет M инвариантным). Ниже перечислены важнейшие работы, посвященные версальным деформациям матриц.

Версальные деформации произвольных комплексных матриц [т. е. для $M = \mathrm{gl}(N, \mathbb{C})$, $G = \mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$] были построены В. И. Арнольдом в статье [1] и подробно обсуждаются также в работах [2–3].

Версальные деформации произвольных вещественных матриц [$M = \mathrm{gl}(N, \mathbb{R})$, $G = \mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$] построены Д. М. Галиным в заметке [4].

Автору настоящего комментария не удалось найти в литературе описание версальных деформаций произвольных кватернионных матриц [$M = \mathrm{gl}(N, \mathbb{H}) = \mathrm{u}^*(2N)$, $G = \mathrm{GL}(N, \mathbb{H}) = \mathrm{U}^*(2N)$]. Отметим, что ввиду некоммутативности тела кватернионов обычные понятия матричной алгебры следует применять к кватернионным матрицам с осторожностью. Пространство $\mathrm{gl}(N, \mathbb{H})$ является алгеброй Ли над $\mathbb{R}$.

Прежде чем перейти к версальным деформациям элементов классических алгебр Ли и Йордана, напомним некоторые определения. Пусть $\mathbb{D}$ — одно из тел $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$, а $\sigma\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ — либо тождественное преобразование, либо инволюция комплексного сопряжения $z = a + bi \mapsto \bar{z} = a - bi$ (в случае $\mathbb{D} = \mathbb{C}$), либо инволюция кватернионного сопряжения $r = a + bi + cj + dk \mapsto \bar{r} = a - bi - cj - dk$ (в случае $\mathbb{D} = \mathbb{H}$). Рассмотрим на $\mathrm{gl}(N, \mathbb{D})$ инволюции

$$L \mapsto L^{\mathrm{c}} = \sigma(L^{\mathrm{t}})$$

(верхний индекс t означает транспонирование) и

$$L \mapsto \alpha(L) = KL^{\mathrm{c}}K^{-1}, \qquad K \text{ невырождена}, \qquad K^{\mathrm{c}} = \varepsilon K, \quad \varepsilon = \pm 1$$

($K \in \mathrm{GL}(N, \mathbb{D})$ — фиксированная матрица, удовлетворяющая указанным условиям). Пространство α-кососимметрических матриц

$$M_- = \{X \in \mathrm{gl}(N, \mathbb{D}) \mid \alpha(X) = -X\}$$

замкнуто относительно коммутирования $[X, Y] = XY - YX$ и изоморфно одной из классических алгебр Ли, перечисленных в таблице ниже. Пространство α-симметрических матриц

$$M_+ = \{X \in \mathrm{gl}(N, \mathbb{D}) \mid \alpha(X) = X\}$$

замкнуто относительно симметризованного умножения $X \circ Y = XY + YX$ и изоморфно одной из классических алгебр Йордана. Напомним, что *алгеброй Йордана*[1] называется коммутативная (но необязательно ассоциативная) алгебра, в которой выполнено тождество $(x^2y)x = x^2(yx)$; любая ассоциативная алгебра превращается в алгебру Йордана при переходе к новому умножению $x \circ y = xy + yx$, подобно тому как любая ассоциативная алгебра превращается в алгебру Ли при переходе к новому умножению $[x, y] = xy - yx$. Множество

$$G = \{A \in \mathrm{GL}(N, \mathbb{D}) \mid \alpha(A) = A^{-1}\}$$

замкнуто относительно умножения матриц и является группой Ли. Оба пространства M_- и M_+ инвариантны относительно действия G на $\mathrm{gl}(N, \mathbb{D})$ сопряжением.

---

[1] Теория алгебр Йордана подробно изложена в книгах [5–6].

Все возможные инволюции α с точностью до естественного отношения эквивалентности и соответствующая номенклатура классических алгебр Ли M_- и групп Ли G приведены в таблице (в последнем столбце этой таблицы указано поле $\{\eta \in \mathbb{D} \mid \sigma(\eta) = \eta\}$, над которым следует рассматривать данную алгебру Ли и соответствующую алгебру Йордана).

тело $\mathbb{D}$	$\sigma(\eta)$	ε	сигнатура K	алгебра M_-	группа G	N	поле $\mathrm{Fix}\,\sigma$
$\mathbb{R}$	η	1	(p,q)	$\mathrm{o}(p,q)$	$\mathrm{O}(p,q)$	$p+q$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	η	-1		$\mathrm{sp}(2n,\mathbb{R})$	$\mathrm{SP}(2n,\mathbb{R})$	$2n$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{C}$	η	1		$\mathrm{o}(N,\mathbb{C})$	$\mathrm{O}(N,\mathbb{C})$	N	$\mathbb{C}$
$\mathbb{C}$	η	-1		$\mathrm{sp}(2n,\mathbb{C})$	$\mathrm{SP}(2n,\mathbb{C})$	$2n$	$\mathbb{C}$
$\mathbb{C}$	$\bar{\eta}$	1	(p,q)	$\mathrm{u}(p,q)$	$\mathrm{U}(p,q)$	$p+q$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{H}$	$\bar{\eta}$	1	(p,q)	$\mathrm{sp}(p,q)$	$\mathrm{SP}(p,q)$	$p+q$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{H}$	$\bar{\eta}$	-1		$\mathrm{o}^*(2n)$	$\mathrm{O}^*(2n)$	n	$\mathbb{R}$

Все необходимые детали и доказательства (или ссылки) приведены в статьях [7–10] (таблица выше заимствована из последней из этих работ).

Отметим, что вместо $\mathrm{sp}(2n,\mathbb{R})$ часто пишут просто $\mathrm{sp}(2n)$, а вместо $\mathrm{o}(N,0)$ и $\mathrm{u}(N,0)$ употребляются обозначения $\mathrm{o}(N)$ и $\mathrm{u}(N)$ (аналогичные соглашения имеют место и для соответствующих групп Ли).

Версальные деформации вещественных гамильтоновых матриц [$M = \mathrm{sp}(2n,\mathbb{R})$ — пространство вещественных гамильтоновых матриц данного четного порядка $2n$, а $G = \mathrm{SP}(2n,\mathbb{R})$ — группа вещественных симплектических линейных операторов] найдены независимо Д. М. Галиным, группой трех канадских математиков и физиков (J. Patera, C. Rousseau, D. Schlomiuk) и H. Koçak'ом. Статьи [11–12] посвящены исключительно алгебре $\mathrm{sp}(2n,\mathbb{R})$. Необходимо отметить, что указанные в этих двух работах формулы для числа параметров миниверсальной деформации, на первый взгляд различные, в действительности эквивалентны. В статье [13] построены версальные деформации элементов всех классических вещественных алгебр Ли $\mathrm{o}(p,q)$, $\mathrm{sp}(2n,\mathbb{R})$, $\mathrm{u}(p,q)$, $\mathrm{sp}(p,q)$ и $\mathrm{o}^*(2n)$.

Версальные деформации элементов всех классических комплексных алгебр Ли $\mathrm{o}(N,\mathbb{C})$ и $\mathrm{sp}(2n,\mathbb{C})$ найдены J. Patera и C. Rousseau [14].

Версальные деформации элементов всех классических алгебр Йордана, соответствующих классическим алгебрам Ли $\mathrm{o}(p,q)$, $\mathrm{sp}(2n,\mathbb{R})$, $\mathrm{o}(N,\mathbb{C})$, $\mathrm{sp}(2n,\mathbb{C})$, $\mathrm{u}(p,q)$, $\mathrm{sp}(p,q)$ и $\mathrm{o}^*(2n)$, построены в статье [15].

Версальные деформации вещественных эквивариантных гамильтоновых матриц [$M \subset \mathrm{sp}(2n, \mathbb{R})$ — пространство вещественных гамильтоновых матриц порядка $2n$, коммутирующих с действием на $\mathbb{R}^{2n}$ компактной группы Ли Γ, сохраняющей симплектическую структуру, а $G \subset \mathrm{SP}(2n, \mathbb{R})$ — группа вещественных симплектических линейных операторов, коммутирующих с действием Γ] описаны в работе [16].

Версальные деформации вещественных инфинитезимально обратимых матриц [здесь M — пространство вещественных матриц, антикоммутирующих с данной инволютивной матрицей R, а G — группа линейных операторов, коммутирующих с R] построены независимо М. Б. Севрюком [17] и C.-W. Shih [18].

Версальные деформации матриц, одновременно гамильтоновых и инфинитезимально обратимых (при этом предполагается, что обращающая линейная инволюция R антисимплектична, т. е. удовлетворяет тождеству $\langle Rx, Ry\rangle \equiv -\langle x, y\rangle$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — линейная симплектическая структура), найдены в работе [19].

Версальные деформации гамильтоновых матриц, инфинитезимально обратимых матриц и матриц, одновременно гамильтоновых и инфинитезимально обратимых, рассмотрены с единой точки зрения I. Hoveijn'ом в статье [20].

В работах [21–22] построены версальные деформации *пар* комплексных матриц размеров $n \times n$ и $n \times m$ относительно некоторого действия т. н. state feedback group.

В работе [23] найдены версальные деформации *пар* комплексных матриц (A, B) одинакового размера $m \times n$, т. е. *пучков матриц* (matrix pencils) $A - \lambda B$, относительно естественного действия группы $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$: $A - \lambda B \xmapsto{(P,Q)} P^{-1}(A - \lambda B)Q$, где $P \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$, $Q \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

[1] Арнольд В. И. О матрицах, зависящих от параметров. *Успехи матем. наук*, 1971, **26**(2), 101–114. [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 155–173.]

[2] Арнольд В. И. Лекции о бифуркациях и версальных семействах. *Успехи матем. наук*, 1972, **27**(5), 119–184.

[3] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, § 30.

[4] Галин Д. М. О вещественных матрицах, зависящих от параметров. *Успехи матем. наук*, 1972, **27**(1), 241–242.

[5] Braun H., Koecher M. Jordan-Algebren. Berlin: Springer, 1966.

[6] Jacobson N. Structure and representations of Jordan algebras. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1968. (Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., 39.)

[7] Wall G. E. On the conjugacy classes in the unitary, symplectic and orthogonal groups. *J. Austral. Math. Soc.*, 1963, **3**(1), 1–62.

[8] Burgoyne N., Cushman R. Conjugacy classes in linear groups. *J. Algebra*, 1977, **44**(2), 339–362.

[9] Patera J., Rousseau C., Schlomiuk D. Dimensions of orbits and strata in complex and real classical Lie algebras. *J. Math. Phys.*, 1982, **23**(4), 490–494.

[10] Djoković D. Ž., Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Normal forms of elements of classical real and complex Lie and Jordan algebras. *J. Math. Phys.*, 1983, **24**(6), 1363–1374.

[11] Галин Д. М. Версальные деформации линейных гамильтоновых систем. *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, 1975, **1**, 63–74.

[12] Koçak H. Normal forms and versal deformations of linear Hamiltonian systems. *J. Differ. Equations*, 1984, **51**(3), 359–407.

[13] Patera J., Rousseau C., Schlomiuk D. Versal deformations of elements of real classical Lie algebras. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1982, **15**(4), 1063–1086.

[14] Patera J., Rousseau C. Complex orthogonal and symplectic matrices depending on parameters. *J. Math. Phys.*, 1982, **23**(5), 705–714.

[15] Patera J., Rousseau C. Versal deformations of elements of classical Jordan algebras. *J. Math. Phys.*, 1983, **24**(6), 1375–1380.

[16] Melbourne I. Versal unfoldings of equivariant linear Hamiltonian vector fields. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1993, **114**(3), 559–573.

[17] Севрюк М. Б. Линейные обратимые системы и их версальные деформации. *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, 1991, **15**, 33–54.

[18] Shih C.-W. Normal forms and versal deformations of linear involutive dynamical systems. *Chinese J. Math.*, 1993, **21**(4), 333–347.

[19] Wan Y.-H. Versal deformations of infinitesimally symplectic transformations with antisymplectic involutions. In: Singularity Theory and its Applications, Part II. Editors: M. Roberts and I. Stewart. Berlin: Springer, 1991, 301–320. (Lecture Notes in Math., 1463.)

[20] Hoveijn I. Versal deformations and normal forms for reversible and Hamiltonian linear systems. *J. Differ. Equations*, 1996, **126**(2), 408–442.

[21] García-Planas M. I. Versal deformations of pairs of matrices. *Linear Algebra Appl.*, 1992, **170**, 194–200.

[22] Ferrer J., García M. I., Puerta F. Brunowsky local form of a holomorphic family of pairs of matrices. *Linear Algebra Appl.*, 1997, **253**, 175–198.

[23] Edelman A., Elmroth E., Kågström B. A geometric approach to perturbation theory of matrices and matrix pencils. Part I: versal deformations. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 1997, **18**(3), 653–692.

М. Б. Севрюк

1970-2

Согласно [1], проблема «центр–фокус» тривиальна (и, более того, из результатов И. Бендиксона вытекает, что общая задача о топологической классификации положений равновесия систем $\dot{x} = v(x)$ в $\mathbb{R}^n$ тривиальна при $n = 2$); см. также статьи [2–3].

[1] Арнольд В. И. О локальных задачах анализа. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1970, № 2, 52–56.

[2] Арнольд В. И. Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости и проблемы топологической классификации особых точек аналитических систем дифференциальных уравнений. *Успехи матем. наук*, 1970, **25**(2), 265–266.

[3] Арнольд В. И. Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости по Ляпунову и проблемы топологической классификации особых точек аналитической системы дифференциальных уравнений. *Функц. анализ и его прилож.*, 1970, **4**(3), 1–9.

1970-3

Пусть (M^{2n}, ω^2) — симплектическое многообразие. В статье [1] поставлен следующий вопрос: *всякое ли гамильтоново поле на* M *с классом вращения* 0 *имеет однозначный гамильтониан*? Эквивалентные формулировки: *в каждом ли классе гомологий* $H_1(M, \mathbb{R})$ *есть гамильтоново поле*? *является ли оператор умножения на* $(\omega^2)^{n-1}$ *изоморфизмом* $H^1(M, \mathbb{R}) \to H^{2n-1}(M, \mathbb{R})$? Ответ положителен, если (M, ω^2) допускает кэлерову структуру.

[1] Арнольд В. И. Об одномерных когомологиях алгебры Ли бездивергентных векторных полей и о числах вращения динамических систем. *Функц. анализ и его прилож.*, 1969, **3**(4), 77–78. [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 147–150.]

1970-5

Для произвольной точки $x \in \mathbb{R}^n$ обозначим через $W(x)$ множество таких чисел $w > 0$, что неравенство

$$|q \cdot x + q_0| < |q|^{-w} \qquad (1)$$

имеет бесконечно много целочисленных решений ($q \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, $q_0 \in \mathbb{Z}$), где $q \cdot x = q_1x_1 + \cdots + q_nx_n$ — скалярное произведение векторов, а $|q| = \max(|q_1|, \ldots, |q_n|) \geqslant 1$ — l_∞-норма вектора q. С другой стороны, через $T(x)$ обозначим множество чисел $\tau > 0$, для которых существует такое $\gamma > 0$ (зависящее от τ), что при всех ($q \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, $q_0 \in \mathbb{Z}$) выполнено неравенство

$$|q \cdot x + q_0| \geqslant \gamma |q|^{-\tau}. \qquad (2)$$

Легко показать, что $\sup W(x) = \inf T(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$. Обозначим число $\sup W(x) = \inf T(x)$ через $\nu(x)$. Из классической теоремы Дирихле 1842 г. о совместных приближениях вытекает, что $n \in W(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, так что всегда $\nu(x) \geqslant n$. С другой стороны, для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ (в смысле меры Лебега) выполнено равенство $\nu(x) = n$ (это легко следует из леммы Бореля–Кантелли). Соответствующие доказательства и библиография приведены, например, в работах [1–3].

Точки $x \in \mathbb{R}^n$, для которых $\nu(x) < +\infty$, называются *диофантовыми* (или *диофантово нормальными*). Как было сказано выше, почти все точки $x \in \mathbb{R}^n$ диофантовы, причем с показателем диофантовости $\nu(x) = n$. Достаточным (но не необходимым) условием равенства $\nu(x) = +\infty$ (означающего, что $W(x)$ совпадает с множеством всех положительных чисел, а $T(x)$ пусто) является линейная зависимость над $\mathbb{Q}$ чисел $x_1, \ldots, x_n, 1$.

Многие задачи математики и математической физики, в которых встречаются «малые знаменатели», требуют исследования диофантовых приближений на подмногообразиях пространства $\mathbb{R}^n$. Впервые этот тезис был сформулирован В. И. Арнольдом в 1968 г. в докладе «Вопросы диофантовых приближений в анализе» на симпозиуме по теории чисел во Владимире, см. [4]. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Почти все точки гладкого подмногообразия $M \subset \mathbb{R}^n$ общего положения (любой положительной размерности) диофантовы.*

Точнее, существует такое число ν_M, $n \leqslant \nu_M < +\infty$, что $\nu(x) \leqslant \nu_M$ для почти всех точек $x \in M$.

Эта теорема была впервые доказана А. С. Пяртли в статье [5] (одна из основных лемм в этой статье принадлежит Г. А. Маргулису). В многочисленных работах, последовавших за основополагающей статьей Пяртли, уточнялись условия общности положения, накладываемые на подмногообразие M, улучшались оценки числа ν_M, рассматривались аналоги неравенств (1) и (2) для величин $|q \cdot x|$, а также $|q \cdot x + q_0 + f(x)|$ и $|q{\cdot}x{+}f(x)|$, где f — гладкая функция на подмногообразии. В качестве примера можно назвать работы [6–11].

Диофантовы приближения на подмногообразиях были впервые использованы в теории КАМ И. О. Парасюком в статье [12] (Парасюк опирался на результаты Пяртли), а в теории усреднения — В. И. Бахтиным в статье [6], см. также обсуждение в книге [13].

Теорема 1 (и все ее модификации, в которых не поднимается вопрос об оптимальном значении величины ν_M) сравнительно проста. Точное значение ν_M для динамических приложений, как правило, несущественно (оно влияет лишь на необходимую гладкость правых частей уравнений). В цитированных выше работах В. И. Бахтина, В. И. Берника, Х. В. Брура, А. С. Пяртли, М. Б. Севрюка, Чж. Ся и Г. Б. Хайтемы [5–11] задача нахождения оптимального значения ν_M не ставилась. В действительности для аналитических подмногообразий $M \subset \mathbb{R}^n$ общего положения справедливо равенство $\nu_M = n$ (т. е. показатель диофантовости такой же, как в объемлющем пространстве), и весьма правдоподобна гипотеза, что это равенство справедливо и для достаточно гладких неаналитических подмногообразий общего положения. Однако доказательство равенства $\nu_M = n$ даже для специальных классов подмногообразий M неизмеримо сложнее, чем просто доказательство существования некоторого $\nu_M < +\infty$. Подмногообразиям $M \subset \mathbb{R}^n$ с $\nu_M = n$ (они называются *экстремальными*) посвящена задача *1972-22*.

Работы, в которых бы изучалась связь диофантовых приближений на подмногообразиях с бифуркациями последних в k-параметрических семействах, автору настоящего комментария неизвестны.

Отметим, наконец, что множества точек x, удовлетворяющих неравенствам вида (1) или (2), можно изучать не только с точки зрения меры Лебега, но и с точки зрения размерности Хаусдорфа, см. книгу [14]. Для открытых областей евклидова пространства такая задача подробно рассматривается в статье [15], а на подмногообразиях — в статье [16].

[1] Спринджук В. Г. Метрическая теория диофантовых приближений. М.: Наука, 1977.

[2] Спринджук В. Г. Достижения и проблемы теории диофантовых приближений. *Успехи матем. наук*, 1980, **35**(4), 3–68.

[3] Шмидт В. Диофантовы приближения. Пер. с англ. В. Г. Чирского под ред. А. Б. Шидловского. М.: Мир, 1983. [*Английский оригинал* 1980 г.]

[4] Постников А. Г., Фрейман Г. А. Межвузовский симпозиум по теории чисел (Владимир, июнь 1968 г.). *Успехи матем. наук*, 1969, **24**(1), 235–237.

[5] Пяртли А. С. Диофантовы приближения на подмногообразиях евклидова пространства. *Функц. анализ и его прилож.*, 1969, **3**(4), 59–62.

[6] Бахтин В. И. Об усреднении в многочастотных системах. *Функц. анализ и его прилож.*, 1986, **20**(2), 1–7.

[7] Бахтин В. И. Диофантовы приближения на образах отображений. *ДАН БССР*, 1991, **35**(5), 398–400.

[8] Берник В. И. Диофантовы приближения на дифференцируемых многообразиях. *ДАН БССР*, 1989, **33**(8), 681–683.

[9] Xia Zh. Existence of invariant tori in volume-preserving diffeomorphisms. *Ergod. Theory Dynam. Syst.*, 1992, **12**(3), 621–631.

[10] Sevryuk M. B. The iteration-approximation decoupling in the reversible KAM theory. *Chaos*, 1995, **5**(3), 552–565.

[11] Broer H. W., Huitema G. B., Sevryuk M. B. Quasi-Periodic Motions in Families of Dynamical Systems: Order amidst Chaos. Berlin: Springer, 1996. (Lecture Notes in Math., 1645.)

[12] Парасюк И. О. Сохранение квазипериодических движений обратимых многочастотных систем. *ДАН УССР, Серия А*, 1982, **9**, 19–22.

[13] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, § 18, с. 150.

[14] Берник В. И., Мельничук Ю. В. Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа. Минск: Наука и техника, 1988.

[15] Dodson M. M., Vickers J. A. G. Exceptional sets in Kolmogorov–Arnol′d–Moser theory. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1986, **19**(3), 349–374.

[16] Dodson M. M., Pöschel J., Rynne B. P., Vickers J. A. G. The Hausdorff dimension of small divisors for lower-dimensional KAM-tori. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 1992, **439**(1906), 359–371.

М. Б. Севрюк

1970-6

Исследованием уравнения в вариациях для гидродинамического уравнения Эйлера занимался Ж. Мисиолек. Он выделил класс ситуаций, когда геодезические (решения уравнений Эйлера) не имеют сопряженных точек. Согласно его теореме 1993 г. [1] на римановом многообразии неположительной кривизны течения идеальной несжимаемой жидкости с постоянным давлением описываются геодезическими без сопряженных точек в группе сохраняющих объем диффеоморфизмов. Типичными примерами такого рода служат течения с полями скоростей — простыми гармониками на торах. Наличие же сопряженных точек у геодезических групп диффеоморфизмов, сохраняющих объем некоторого компактного многообразия, связано обычно с существованием двумерных направлений, проходящих через начальное поле скоростей геодезической, с положительными секционными кривизнами.

Такого рода пример геодезической с сопряженными точками впервые построил также Мисиолек [2] для течения на двумерном торе с функцией тока $\cos 6x \cos 2y$ (на наличие у поля скоростей такого течения двумерных направлений, по которым секционные кривизны оказываются отрицательными, указывал ранее Арнольд [3]). Мисиолеком также было отмечено существование двумерных направлений с положительными секционными кривизнами для ABC-течений на трехмерном торе [2].

Для многообразий с кривизной примером течения с сопряженными точками на геодезической является вращение двумерной сферы, что также доказано Мисиолеком [1] (наличие у такого течения двумерных направлений с положительными секционными кривизнами установил Лукацкий [4]).

[1] Misiołek G. Stability of flows of ideal fluids and the geometry of the group of diffeomorphisms. *Indiana Univ. Math. J.*, 1993, **42**(1), 215–235.

[2] Misiołek G. Conjugate points in $\mathcal{D}_\mu(\mathbb{T}^2)$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1996, **124**(3), 977–982.

[3] Arnol′d V. I. Sur la géométrie différentielle de groupes de Lie de dimension infinie and ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits. *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*), 1966, **16**(1), 319–361.

[4] Лукацкий А. М. О кривизне группы диффеоморфизмов, сохраняющих меру двумерной сферы. *Функц. анализ и его прилож.*, 1979, **13**(3), 23–27.

А. М. Лукацкий

1970-7

Секционные кривизны группы SDiff(S^2) были впервые подсчитаны Лукацким [1] для векторного поля h вращения вокруг оси Z и для обобщенного пассатного потока zh на S^2, причем им было установлено, что в случае поля вращения h секционные кривизны по двумерным направлениям, проходящим через него, неотрицательны (и, как правило, положительны). В случае же обобщенного пассатного потока аналогичные кривизны, напротив, как правило, отрицательны. Затем в контексте вычисления тензора кривизны групп диффеоморфизмов, сохраняющих площадь поверхности, Лукацким была установлена отрицательность секционных кривизн для несколько более широкого класса векторных полей на S^2, например, для полей вида $f(z)h$ [2]. Расчет секционных кривизн группы SDiff(S^2) произвели затем Аракелян и Завидия с использованием коэффициентов Клебша–Гордана [3]. Наиболее же полный анализ секционных кривизн этой группы осуществил сравнительно недавно K. Yoshida [4].

Для n-мерных торов секционные кривизны группы SDiff$(\mathbb{T}^n)$ были впервые подсчитаны Лукацким, им же вычислена кривизна Риччи этой группы [5]. Для трехмерного тора позднее T. Kambe, F. Nakamura и Y. Hattori [6] исследовали кривизны ABC-течения на $\mathbb{T}^3$ и, в частности, установили, что секционные кривизны такого вида полей не зависят от значений параметров A, B, C.

[1] Лукацкий А. М. О кривизне группы диффеоморфизмов, сохраняющих меру двумерной сферы. *Функц. анализ и его прилож.*, 1979, **13**(3), 23–27.

[2] Лукацкий А. М. О структуре тензора кривизны группы диффеоморфизмов, сохраняющих меру двумерного компактного многообразия. *Сиб. матем. ж.*, 1988, **29**(6), 95–99.

[3] Arakelyan T. A., Savvidy G. K. Geometry of a group of area-preserving diffeomorphisms. *Phys. Lett. B*, 1989, **223**(1), 41–46.

[4] Yoshida K. Riemannian curvature on the group of area-preserving diffeomorphisms (motions of fluid) of 2-sphere. *Physica D*, 1997, **100**(3–4), 377–389.

[5] Лукацкий А. М. О кривизне группы диффеоморфизмов, сохраняющих меру n-мерного тора. *Сиб. матем. ж.*, 1984, **25**(6), 76–88.

[6] Kambe T., Nakamura F., Hattori Y. Kinematical instability and line-stretching in relation to the geodesics of fluid motion. In: Topological Aspects of the Dynamics of Fluids and Plasmas. Editors: H. K. Moffatt, G. M. Zaslavsky, P. Comte and M. Tabor. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992, 493–504. (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. E Appl. Sci., 218.)

А. М. Лукацкий

1970-8

См. работу [1].

[1] Фаддеев Л. Д. К теории устойчивости стационарных плоско-параллельных течений идеальной жидкости. *Записки науч. семинаров ЛОМИ*, 1971, **21**, 164–172. (Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций, 5.)

1970-9

В двумерной гидродинамике в работах В. И. Арнольда установлены достаточные условия знакоопределенности второй вариации формы энергии $\delta^2(E)$ (например, для течений с плоскопараллельным профилем), см. [1], гл. II, § 4. Вопрос об индексах в двумерном случае остается открытым. В трехмерном случае вторая вариация формы энергии $\delta^2(E)$ уже не является знакоопределенной (индексы инерции равны (∞, ∞)), см. [1], гл. II, § 5.

[1] Arnol′d V. I., Khesin B. A. Topological Methods in Hydrodynamics. New York: Springer, 1998. (Appl. Math. Sci., 125.) [*Перевод на русский язык*: Арнольд В. И., Хесин Б. А. Топологические методы в гидродинамике. М.: ФАЗИС, готовится к изданию.]

А. М. Лукацкий

1970-10, а также *1972-18*

Н. А. Никишин [1] и К. П. Саймон [2] независимо доказали, что всякий симплектоморфизм сферы S^2 имеет по меньшей мере две геометрически различные неподвижные точки (это утверждение было сформулировано в виде гипотезы А. И. Шнирельманом). В обеих статьях [1–2] в качестве основной леммы доказывается утверждение, что индекс изолированной неподвижной точки 0 симплектоморфизма $(\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ не превосходит единицы.

В работе [2] также отмечается, что всякое градиентное или бездивергентное векторное поле на S^2 имеет по меньшей мере две геометрически различные особые точки. Этот факт на самом деле почти очевиден. Действительно, гладкое бездивергентное векторное поле на сфере S^2 является гамильтоновым. Так как любой потенциал (в случае градиентного поля) или гамильтониан (в случае гамильтонова поля) на компактном многообразии имеет по меньшей мере две критические точки — максимум и минимум, то и соответствующее поле имеет по меньшей мере две особые точки.

[1] Никишин Н. А. О неподвижных точках диффеоморфизмов двумерной сферы, сохраняющих ориентированную площадь. *Функц. анализ и его прилож.*, 1974, **8**(1), 84–85.

[2] Simon C. P. A bound for the fixed-point index of an area-preserving map with applications to mechanics. *Invent. Math.*, 1974, **26**(3), 187–200.

В. И. Арнольд, Б. А. Хесин

1970-11

Эта группа тривиальна при $n \neq 2$ и изоморфна $\mathbb{Z}^N$ с $N = (m-1)^3$ при $n = 2$. Действительно, пусть $W \subset \mathbb{C}^{n+1}$ — коническая гиперповерхность, проективизацией которой является V. Тогда $\mathbb{C}^{n+1} \setminus W \sim$ $\sim (\mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus V) \times \mathbb{C}^*$, в частности, $\pi_i(\mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus V) = \pi_i(\mathbb{C}^{n+1} \setminus W)$ при $i > 1$. Но $\mathbb{C}^{n+1} \setminus W$ расслоено над $\mathbb{C}^* \sim \mathbb{S}^1$, и это расслоение (Милнора) задается однородной функцией f степени m, выделяющей конус W.

Точная последовательность этого расслоения дает $\pi_i(\mathbb{C}^{n+1} \setminus W) =$ $= \pi_i(f^{-1}(1))$ при $i > 1$. Но $f^{-1}(1)$ — это слой Милнора, гомотопически эквивалентный букету $(m-1)^{n+1}$ сфер размерности n.

В. А. Васильев

1970-13, а также *1981-13*

Рациональные гомологии рассматриваемого множества такие же, как у группы $\mathrm{PGL}(\mathbb{C}\mathrm{P}^2)$, т. е. многочлен Пуанкаре равен $(1+t^3)(1+t^5)$.

Смежные результаты: многочлен Пуанкаре множества неособых кубических поверхностей в $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ такой же, как у $\mathrm{PGL}(\mathbb{C}\mathrm{P}^3)$, т. е. равен $(1+t^3)(1+t^5)(1+t^7)$, а для множества неособых кривых степени 4 в $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ он равен $(1+t^3)(1+t^5)(1+t^6)$.

(Это я только что посчитал, но не уверен, что это не известно. Во всяком случае для кубик в $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ это просто.)

В. А. Васильев

1970-14

Насколько мне известно, никаких результатов в этом направлении до сих пор не получено. Впрочем, даже гораздо более простая задача о вычислении/изучении одномерных (ко)гомологий пространства узлов — даже в $\mathbb{R}^3$ — представляется не менее сложной, чем изучение 0-мерных (ко)гомологий, т. е. инвариантов узлов. О первых конкретных вычислениях, принадлежащих, в частности, Д. М. Тейблюму и В. Э. Турчину, см. [1].

[1] Васильев В. А. Топология дополнений к дискриминантам. М.: ФАЗИС, 1997, § V.8.

В. А. Васильев

1970-15, а также *1995-1*, *1995-2*, *1996-8* и *1996-13*

Пространство мероморфных функций степени n на римановых поверхностях рода g стратифицировано по кратностям критических точек и значений. Первые вопросы, относящиеся к геометрии дискриминанта в этом пространстве, — это кратность обобщенного отображения Ляшко–Лойенги (отображения ЛЛ) на данном страте дискриминанта или трансверсальная кратность менее вырожденного страта относительно более вырожденного.

Трансверсальную кратность вычислять легче, потому что она не зависит от глобальной структуры стратов, и она известна во всех случаях (см. [1]).

Кратность отображения ЛЛ известна только для пространства многочленов ($g = 0$, функции с одним полюсом — см. [2]) и для пространства рациональных функций с произвольными полюсами, но лишь с простыми критическими значениями ($g = 0$, все критические значения просты, кроме, может быть, одного — см. [3]). В других случаях имеются менее явные формулы (с суммированием по всем характерам симметрической группы S_n или с интегралами от классов Черна некоторых расслоений по пространствам модулей).

Нахождение кратности отображения ЛЛ эквивалентно подсчету числа разветвленных накрытий над $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ с данным ветвлением, или подсчету числа некоторых помеченных графов, вложенных в риманову поверхность, или подсчету числа списков перестановок с заданными длинами циклов и заданной композицией.

В двух случаях (описанных выше), когда кратность известна, рассматриваемые графы могут быть сосчитаны комбинаторными методами. Для пространства многочленов это сделано в работе [4]. Для рациональных функций с простыми критическими значениями ответ был впервые дан Гурвицем без доказательства. Комбинаторное доказательство можно найти в статье [3].

Другой подход к вычислению кратности — алгебро-геометрический. Точка в образе представляется как пересечение гиперплоскостей или подмногообразий, после чего число ее прообразов находится как индекс пересечения прообразов этих гиперплоскостей или подмногообразий. Оба результата, упомянутых выше, могут быть получены и с использованием этого подхода. Для случая мероморфных функций с простыми критическими значениями (но произвольными полюсами) на поверхностях *произвольного* рода описанный подход позволяет выразить кратность отображения ЛЛ через интегралы от классов Черна некоторых расслоений по пространству модулей комплексных структур на поверхности. Такой подход ведет к лучшему пониманию геометрии дискриминанта.

Наконец, нахождение кратности отображения ЛЛ с использованием списков перестановок приводит к общей формуле, пригодной для всех случаев, которая выражает кратность как сумму по всем характерам симметрической группы S_n [5]. На основе этой формулы был получен более явный результат для мероморфных функций с одним полюсом, но с произвольными критическими значениями и на поверхностях произвольного рода [6].

[1] Zvonkine D. A. Transversal multiplicities of the Lyashko–Looijenga map. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1997, **325**(6), 589–594.

[2] Звонкин Д. А., Ландо С. К. О кратностях отображения Ляшко–Лойенги на стратах дискриминанта. *Функц. анализ и его прилож.*, 1999, **33**(3), 21 34.

[3] Goulden I. P., Jackson D. M. Transitive factorisations into transpositions and holomorphic mappings of the sphere. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1997, **125**(1), 51–60.

[4] Goulden I. P., Jackson D. M. The combinatorial relationship between trees, cacti and certain connection coefficients for the symmetric group. *European J. Combinatorics*, 1992, **13**(5), 357–365.

[5] Медных А. Д. Неэквивалентные накрытия римановых поверхностей с заданным типом ветвления. *Сиб. матем. ж.*, 1984, **25**(4), 120–142.

[6] Goupil A., Schaeffer G. Factoring n-cycles and counting maps of given genus. *European J. Combinatorics*, 1998, **19**(7), 819–834.

Д. А. Звонкин

* * *

1970-15, а также *1995-1*, *1995-2*, *1996-8* и *1996-13*

Топология дополнения к дискриминанту в пространстве рациональных функций на сфере S^2 с фиксированными порядками полюсов понята [1]. Предыдущие работы: [2–4] (1 полюс), [5] (2 полюса). Задача фактически рассматривалась и была в значительной степени решена еще Гурвицем [6] (см. также [7]).

Топология дискриминанта известна для стратификации пространства многочленов (рациональных функций с одним полюсом) [8] (см. также [9–10]).

О стратификации пространств рациональных функций с более чем одним полюсом и мероморфных функций на поверхностях положительного рода известно очень мало.

Алгоритм, дающий топологическую классификацию алгебраических функций, рассматриваемых как отображения римановой поверхности на сферу S^2, получен в [11].

[1] Goryunov V. V., Lando S. K. On enumeration of meromorphic functions on the line. *AMS Translations, Ser.* 2 (to appear).

[2] Looijenga E. J. N. The complement of the bifurcation variety of a simple singularity. *Invent. Math.*, 1974, **23**(2), 105–116.

[3] Арнольд В. И. Критические точки функций и классификация каустик. *Успехи матем. наук*, 1974, **29**(3), 243–244. [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 213–214.]

[4] Ляшко О. В. Геометрия бифуркационных диаграмм. В кн.: Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики, т. 22. М.: ВИНИТИ, 1983, 94–129.

[5] Арнольд В. И. Топологическая классификация комплексных тригонометрических многочленов и комбинаторика графов с одинаковым числом вершин и ребер. *Функц. анализ и его прилож.*, 1996, **30**(1), 1–17.

[6] Hurwitz A. Über Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten. *Math. Ann.*, 1891, **39**(1), 1–61.

[7] Goulden I. P., Jackson D. M. Transitive factorisations into transpositions and holomorphic mappings on the sphere. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1997, **125**(1), 51–60.

[8] Звонкин Д. А., Ландо С. К. О кратностях отображения Ляшко–Лойенги на стратах дискриминанта. *Функц. анализ и его прилож.*, 1999, **33**(3), 21–34.

[9] Zvonkine D. A. Multiplicities of the Lyashko–Looijenga map on its strata. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1997, **324**(12), 1349–1353.

[10] Zvonkine D. A. Transversal multiplicities of the Lyashko–Looijenga map. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1997, **325**(6), 589–594.

[11] Здравковска С. Топологическая классификация полиномиальных отображений. *Успехи матем. наук*, 1970, **25**(4), 179–180.

С. К. Ландо

* * *

1970-15, а также *1995-1*, *1995-2*, *1996-8* и *1996-13*

Пространство $H_{g,n}$ мероморфных функций степени n на римановых поверхностях рода g ($\dim_{\mathbb{C}} H_{g,n} = 2g+2n-2$) называется *пространством Гурвица*. Его связность доказана Гурвицем [1]. Построены алгебро-геометрическая [2], теоретико-функциональная [3] и геометрическая [4] компактификации $H_{g,n}$. Найдена эйлерова характеристика геометрической компактификации $N_{g,n}$ [4].

Соответствие «мероморфная функция $\rightsquigarrow$ набор ее критических значений» порождает отображение типа Ляшко–Лойенги $\varphi\colon N_{g,n} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Естественная стратификация пространства $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ клетками Шуберта индуцирует с помощью φ стратификацию пространства $N_{g,n}$ и, следовательно, пространства $H_{g,n}$. Компоненты связности страта $M \subset H_{g,n}$ этой стратификации состоят из топологически эквивалентных мероморфных функций. Другими словами, если $(f\colon P \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1)$ принадлежит M, то $(\widetilde{f}\colon \widetilde{P} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1)$ тоже принадлежит M, если и только если существуют такие гомеоморфизмы $\psi_1\colon \widetilde{P} \to P$ и $\psi_2\colon \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$, что $f\psi_1 = \psi_2\widetilde{f}$ [5].

Особую роль играют компоненты $H_{g,n}(n_1, \ldots, n_k) \subset H_{g,n}$, состоящие из мероморфных функций с простыми конечными критическими значениями и дивизорами полюсов вида $n_1p_1 + \cdots + n_kp_k$, где $p_i \neq p_j$. Согласно [6] они обладают естественной структурой фробениусова многообразия. Связность пространства $H_{g,n}(n_1, \ldots, n_k)$ доказана в [7] (см. также [8]). Компоненты связности пространства многочленов степени n исследованы в [9]. В этом случае связны, в частности, все компоненты коразмерности менее $n/4$ [9].

Компоненты связности стратификации пространства $H_{g,n}$ имеют довольно простую топологическую структуру. Каждый автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$ переводит мероморфную функцию $(f\colon P \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1)$ из произвольной компоненты связности M этой стратификации в мероморфную функцию $(\alpha f\colon P \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1)$ из M и, следовательно, действует на M. Согласно [10] (см. также [5]) $M/\mathrm{Aut}(\mathbb{C}\mathrm{P}^1) \cong \mathbb{R}^m/\mathrm{Mod}_M$, где Mod_M — дискретная группа диффеоморфизмов, изоморфная подгруппе группы сферических кос. Для пространства тригонометрических многочленов это доказано в [11]. Полное описание группы Mod_M для пространства мероморфных функций общего положения $M = H_{g,n}(1, \ldots, 1)$ содержится в [12].

[1] Hurwitz A. Über Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten. *Math. Ann.*, 1891, **39**(1), 1–61.

[2] Harris J., Mumford D. On the Kodaira dimension of the moduli space of curves. *Invent. Math.*, 1982, **67**(1), 23–86.

[3] Diaz S., Edidin D. Towards the homology of Hurwitz spaces. *J. Differ. Geom.*, 1996, **43**(1), 66–98.

[4] Natanzon S. M., Turaev V. G. A compactification of the Hurwitz space. *Topology*, 1999, **38**(4), 889 914.

[5] Натанзон С. М. Модули римановых поверхностей, пространства типа Гурвица и их супераналоги. *Успехи матем. наук*, 1999, **54**(1), 61–116.

[6] Dubrovin B. A. Geometry of 2D topological field theories. In: Integrable Systems and Quantum Groups (Montecatini Terme, 1993). Editors: M. Francaviglia and S. Greco. Berlin: Springer, 1996, 120–348. (Lecture Notes in Math., 1620.)

[7] Натанзон С. М. Топология двумерных накрытий и мероморфные функции на вещественных и комплексных алгебраических кривых, I. *Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике*, 1988, **23**, 79–103.

[8] Natanzon S. M. Topology of 2-dimensional coverings and meromorphic functions on real and complex algebraic curves. *Selecta Math. Sov.*, 1993, **12**(3), 251–291.

[9] Khovanskiĭ A. G., Zdravkovska S. Branched covers of S^2 and braid groups. *J. Knot Theory Ramifications*, 1996, **5**(1), 55–75.

[10] Natanzon S. M. Spaces of meromorphic functions on Riemann surfaces. In: Topics in Singularity Theory. V. I. Arnol′d's 60th Anniversary Collection. Editors: A. Khovanskiĭ, A. Varchenko and V. Vassiliev. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997, 175–180. (AMS Translations, Ser. 2, 180; Advances in Math. Sci., 34.)

[11] Арнольд В. И. Топологическая классификация комплексных тригонометрических многочленов и комбинаторика графов с одинаковым числом вершин и ребер. *Функц. анализ и его прилож.*, 1996, **30**(1), 1–17.

[12] Натанзон С. М. Униформизация пространств мероморфных функций. *ДАН СССР*, 1986, **287**(5), 1058–1061.

С. М. Натанзон

1970-16

Это задача из статьи [1], см. также [2–3].

[1] Арнольд В. И. О локальных задачах анализа. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1970, № 2, 52–56.

[2] Арнольд В. И. Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости и проблемы топологической классификации особых точек аналитических систем дифференциальных уравнений. *Успехи матем. наук*, 1970, **25**(2), 265–266.

[3] Арнольд В. И. Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости по Ляпунову и проблемы топологической классификации особых точек аналитической системы дифференциальных уравнений. *Функц. анализ и его прилож.*, 1970, **4**(3), 1–9.

1971

1971-1

В заметке [1] эта задача рассмотрена для диффеоморфизмов $(\mathbb{R}^2, 0) \hookleftarrow$ общего положения (точнее, конечно-модальных) класса C^∞. Ответ на поставленный в задаче вопрос положительный (в случае $k = 2$).

Решение задачи в [1] получено с помощью инвариантных слоений, задаваемых фазовыми портретами подходящих векторных полей. Векторные поля и их фазовые портреты возникли в этой задаче в качестве технического упрощения для получения и решения соответствующих гомологических уравнений. В настоящее время неясно, по существу, какую роль играют инвариантные слоения в случае более высоких размерностей. Уместно отметить работу [2], в которой в многомерной ситуации вычислены инвариантные меры в окрестности невырожденных особых точек векторных полей. Вычисления используют инвариантные слоения в многомерном случае. Результаты работы [2] показывают правильные методики обработки фрактальных множеств, возникающих при дискретизации динамических систем с непрерывным временем.

[1] Богданов Р. И. Факторизация диффеоморфизмов над фазовыми портретами векторных полей на плоскости. *Функц. анализ и его прилож.*, 1997, **31**(2), 67–70.

[2] Богданов Р. И. Сингулярные относительные интегральные инварианты и адиабатические процессы термодинамики. В кн.: Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современная математика и ее приложения, т. 47. Тематические обзоры (Динамические системы–7). Деп. в ВИНИТИ, 1997, 35–65.

Р. И. Богданов

1971-3

Кроме статей, перечисленных в условии задачи, см. также работу [1].

[1] Arnol′d V. I. Problèmes résolubles et problèmes irrésolubles analytiques et géométriques. In: Passion des Formes. Dynamique Qualitative Sémiophysique et Intelligibilité. Dédié à R. Thom. Fontenay-St Cloud: ENS Éditions, 1994, 411–417; In: Formes et Dynamique, Renaissance d'un Paradigme. Hommage à René Thom. Paris: Eshel, 1995. [*Перевод на русский язык в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 577–582.]

1971-4, а также *1976-29*

Это задача об обращении классической теоремы Лагранжа–Дирихле: *положение равновесия* 0 *системы* $\ddot{x} = -\partial U/\partial x$, $x \in \mathbb{R}^n$, *устойчиво, если потенциал* U *имеет в критической точке* 0 *строгий локальный минимум* (доказательство: полную механическую энергию можно взять в качестве функции Ляпунова). Вопрос о том, справедливо ли обращение этой теоремы, был поставлен А. М. Ляпуновым, см. [1] (гл. I, п° 16 и гл. II, п° 25) и [2]. Отметим, что в общем случае условие теоремы Лагранжа–Дирихле не является необходимым для устойчивости даже для систем с одной степенью свободы, как показывает следующий хорошо известный C^∞-контрпример Пенлеве–Уинтнера: $U(x) = \exp(-x^{-2})\cos x^{-1}$ при $x \neq 0$ и $U(0) = 0$. Поэтому задача об обращении теоремы Лагранжа–Дирихле имеет смысл лишь при тех или иных дополнительных предположениях (например, аналитичности потенциала).

Проблеме обращения теоремы Лагранжа–Дирихле посвящена обширная литература, см., например, монографии и обзоры [3–7]. Здесь мы отметим лишь важные работы В. В. Козлова и В. П. Паламодова [8–16]. В частности, в статье [8] В. П. Паламодов доказал обращение теоремы Лагранжа–Дирихле для систем с двумя степенями свободы в случае аналитических потенциалов U или бесконечно дифференцируемых потенциалов, для которых критическая точка 0 конечнократна. В работе [16] Паламодов анонсировал (вместе со схемой доказательства) полное решение задачи об обращении теоремы Лагранжа–Дирихле в случае аналитических потенциалов для любого числа степеней свободы.

Частным случаем обращения теоремы Лагранжа–Дирихле является утверждение о неустойчивости положений равновесия систем с *гармоническим* потенциалом U (т. е. удовлетворяющим уравнению Лапласа $\Delta U = 0$). В частности, имеет место теорема Ирншоу (см., например, [17]): *равновесие системы электрических зарядов в стационарном электрическом поле всегда неустойчиво.*

[1] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. В кн.: Собр. соч., т. II. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1956, 7–263. [*Оригинальная публикация* 1892 г.]

[2] Ляпунов А. М. О неустойчивости равновесия в некоторых случаях, когда функция сил не есть максимум. В кн.: Собр. соч., т. II. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1956, 391–400. [*Оригинальная публикация* 1897 г.]

[3] Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. Пер. с англ. В. Н. Рубановского, В. С. Сергеева и С. Я. Степанова под ред. В. В. Румянцева. М.: Мир, 1980. [*Английский оригинал* 1977 г.]

[4] Карапетян А. В., Румянцев В. В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем. Итоги науки и техники ВИНИТИ. Общая механика, т. 6. М.: ВИНИТИ, 1983.

[5] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 3 (Динамические системы–3). М.: ВИНИТИ, 1985, гл. 7, § 5.

[6] Румянцев В. В., Сосницкий С. П. О неустойчивости равновесия голономных консервативных систем. *Прикл. матем. механ.*, 1993, **57**(6), 144–166.

[7] Козлов В. В., Фурта С. Д. Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1996.

[8] Паламодов В. П. Об устойчивости равновесия в потенциальном поле. *Функц. анализ и его прилож.*, 1977, **11**(4), 42–55.

[9] Козлов В. В. Неустойчивость равновесия в потенциальном поле. *Успехи матем. наук*, 1981, **36**(1), 209–210.

[10] Козлов В. В. О неустойчивости равновесия в потенциальном поле. *Успехи матем. наук*, 1981, **36**(3), 215–216.

[11] Козлов В. В. Асимптотические решения уравнений классической механики. *Прикл. матем. механ.*, 1982, **46**(4), 573–577.

[12] Козлов В. В., Паламодов В. П. Об асимптотических решениях уравнений классической механики. *ДАН СССР*, 1982, **263**(2), 285–289.

[13] Козлов В. В. Гипотеза о существовании асимптотических движений в классической механике. *Функц. анализ и его прилож.*, 1982, **16**(4), 72–73.

[14] Козлов В. В. Асимптотические движения и проблема обращения теоремы Лагранжа–Дирихле. *Прикл. матем. механ.*, 1986, **50**(6), 928–937.

[15] Козлов В. В. Об одной задаче Кельвина. *Прикл. матем. механ.*, 1989, **53**(1), 165–167.

[16] Palamodov V. P. Stability of motion and algebraic geometry. In: Dynamical Systems in Classical Mechanics. Editor: V. V. Kozlov. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995, 5–20. (AMS Translations, Ser. 2, 168; Advances in Math. Sci., 25.)

[17] Тамм И. Е. Основы теории электричества, изд. 10-е. М.: Наука, 1989, гл. I, § 19.

М. Б. Севрюк

1971-7

В этой задаче в случае векторных полей на плоскости появилась редукция. В 50-е гг. Е. А. Андроновой-Леонтович была высказана следующая гипотеза (см. [1]). *Положительно повернутым* векторным полем (или ростком векторного поля) назовем векторное поле (соответственно росток), полученное из исходного поворотом на малый положительный угол (например, против часовой стрелки). Угол поворота является, вообще говоря, функцией на фазовой плоскости.

Гипотеза Андроновой-Леонтович. *Пусть положительно повернутое векторное поле (росток в особой точке) имеет топологически эквивалентный с исходным векторным полем фазовый портрет. Тогда достаточно малые возмущения исходного векторного поля не изменяют его фазового портрета.*

В работе [2] эта гипотеза уточнена и доказана. Уточнение заключается в том, что в гипотезе Андроновой-Леонтович нужно потребовать существования однопараметрического семейства положительно повернутых векторных полей. Более того, пусть производная по параметру угла поворота при нулевом значении параметра оценивается снизу p-й степенью расстояния до особой точки (p натуральное). Далее, пусть сопрягающий гомеоморфизм класса C^r зависит от параметра и фазовой переменной ($r \geqslant 2$). Тогда существует целое число $k(p, r)$ такое, что возмущения исходного векторного поля, не меняющие его $k(p, r)$-струю в особой точке, C^r-эквивалентны исходному векторному полю.

В работе [2] показано, что приведенное выше достаточное условие устойчивости является и необходимым (с уточнениями типа регулярности орбит в пространстве всех векторных полей). Таким образом, в регулярном случае уточненная гипотеза Е. А. Андроновой-Леонтович дает необходимые и достаточные условия устойчивости фазового портрета векторного поля в окрестности особой точки относительно достаточно малых возмущений векторного поля. Уточнения возникают, естественно, в связи с переходом к алгебрам Ли от соответствующих групп Ли. Со времени появления работ Э. Нётер известно, что в алгебрах Ли исследование проблем упрощается.

Кажется весьма правдоподобной гипотеза, что в случае плоскости задача *1971-7* имеет отрицательное решение. Однако, насколько известно автору настоящего комментария, решение не опубликовано до сих пор даже в случае плоскости.

Отметим также, что условие устойчивости фазового портрета, появившееся в уточнении гипотезы Андроновой-Леонтович, значительно проще проверяется по сравнению с условием устойчивости по Ляпунову. В случае особой точки, являющейся центром в линейном приближении, они, конечно, эквивалентны.

По-видимому, гипотеза Андроновой-Леонтович допускает обобщения на многомерный случай (впрочем, не совсем очевидные).

[1] Леонтович Е. А. О некоторых аналогиях между плоскими алгебраическими кривыми и алгебраическими динамическими системами на плоскости. *ДАН СССР*, 1959, **129**(3), 503–506.

[2] Богданов Р. И. Мультипликативная теория орбитальной эквивалентности векторных полей на плоскости. *Труды МИРАН им. В. А. Стеклова*, 1998, **221**, 101–126.

Р. И. Богданов

1971-8

Для векторных полей на плоскости в этой задаче получены следующие продвижения в последние годы.

В учебнике [1] описан метод орбитальной эквивалентности для изучения фазовых портретов векторных полей в окрестности сложной особой точки (для простых особых точек топологическая классификация получена А. Пуанкаре в прошлом столетии).

Слова «орбитальная эквивалентность» выше относятся к действию группы Diff^+ на пространстве векторных полей. Группа Diff^+ является полупрямым произведением группы диффеоморфизмов фазового пространства на мультипликативную подгруппу единиц в кольце гладких функций на фазовом пространстве. Действию группы Diff^+ на пространстве векторных полей (расширению присоединенного представления группы Ли Diff^+ на своей алгебре Ли) отвечает линейное представление алгебры Ли группы Diff^+ на алгебре Ли всех (гладких) векторных полей. С помощью операции внешнего умножения на фиксированное векторное поле это представление проектируется на пространство бивекторных полей на фазовом пространстве. Точнее, проекция представления дается действием производной Ли вдоль фиксированного проекцией векторного поля на пространстве бивекторных полей.

Проекция представления, описанная выше, имеет большое ядро (оно включает, в частности, все векторные поля, коллинеарные фиксированному проекцией векторному полю). Другими словами, расслоение пространства всех векторных полей на орбиты действия группы Diff^+ не является главным. В работе [2] (см. также [3] и анонс в [4]) для указанного расслоения вычислена соответствующая действию группы Diff^+ на пространстве векторных полей связность, названная там же *орбитальной связностью.* Там же сформулирована гипотеза, что с учетом орбитальной связности особые точки векторных полей на плоскости (за исключением случаев коразмерности ∞ в пространстве гладких векторных полей) допускают конечнопараметрическую версальную деформацию.

[1] Богданов Р. И. Локальная орбитальная эквивалентность векторных полей на плоскости. М.: Изд-во МГУ, 1993.

[2] Богданов Р. И. Орбитальная связность и версальные семейства векторных полей на плоскости. *Функц. анализ и его прилож.* (в печати).

[3] Богданов Р. И. Факторизация диффеоморфизмов над фазовыми портретами векторных полей на плоскости. *Функц. анализ и его прилож.*, 1997, **31**(2), 67–70.

[4] Богданов Р. И. Версальные семейства фазовых портретов векторных полей на плоскости. *Успехи матем. наук*, 1998, **53**(4), 131.

Р. И. Богданов

1971-9

Естественное перенесение проблемы Гильберта (см. [1–3]) о предельных циклах для полиномиальных векторных полей на плоскости на случай дискретного времени предполагает рассмотрение диффеоморфизма фазовой плоскости и его итераций. По существу здесь необходимо ответить на два вопроса: Чем заменить условие полиномиальности векторных полей в классической проблеме Гильберта о предельных циклах? О каком конечном целом инварианте пойдет речь в случае дискретного времени?

В 1993 г. в работе [4] был описан пример динамической системы на плоскости с дискретным временем, названный там же «Bogdanov map» (BM).

Основные свойства BM, отмеченные в [4], заключаются в следующем:

а) BM — полиномиальный (квадратичный) диффеоморфизм плоскости, зависящий от трех вещественных параметров, а обратный к нему является рациональным алгебраическим диффеоморфизмом;

б) при обнулении двух параметров из трех BM становится диффеоморфизмом, сохраняющим элемент площади на плоскости;

в) при некоторых значениях параметров BM имеет гиперболические периодические орбиты с гетероклиническими или гомоклиническими инвариантными кривыми, т. е. имеет бесконечное число периодических гиперболических орбит в соответствии с результатами символической динамики (см. [5] и [6], §§ 13, 33);

г) при некоторых значениях параметров BM наряду с гиперболическими периодическими орбитами имеет асимптотически (не)устойчивые орбиты; поскольку при удачном выборе параметров подходящая итерация BM в окрестности неподвижной точки, отвечающей периодической асимптотически (не)устойчивой орбите, выглядит как исходное BM (во всяком случае, с точки зрения нормальных форм), возможно явление «зашнуровки», ведущее к гипотезе существования для BM счетного числа периодических асимптотически (не)устойчивых орбит.

Автор настоящего комментария с коллегами в [7–9] продолжил численные исследования, начатые в [4]. Развитие исследований заключалось в нахождении таких значений параметров для BM, которые дают возможность вычислить большой набор асимптотически (не)устойчивых периодических орбит BM (мы вычисляем практически ≈ 500 орбит по отдельности). Значения параметров в [7–9] $\approx 0{,}00001$, в то время как в [4] — $\approx 0{,}01$. Такие малые значения параметров позволяют говорить о *слабодиссипативной теории Колмогорова–Арнольда–Мозера* (КАМ).

В классической теории КАМ в окрестности эллиптической орбиты имеется по крайней мере счетное число эллиптических периодических орбит. В слабодиссипативной теории КАМ такие структуры исчезают, так как эллиптических периодических орбит в общем положении нет. Более того, периодические орбиты, являющиеся асимптотически (не)устойчивыми, имеют нетривиальное множество (отталкивающихся от них) притягивающихся к ним точек с положительной мерой в фазовом пространстве. Это позволяет рандомизировать асимптотически (не)устойчивые орбиты, помимо величины периода, мерой вышеуказанного множества. Кроме того, в слабодиссипативной теории КАМ можно пользоваться адиабатическими инвариантами на периодических орбитах.

В [9] приведены результаты статистического анализа четырех наборов асимптотически (не)устойчивых периодических орбит для ВМ, отвечающих четырем различным наборам значений параметров в ВМ.

Анализ показывает, что при возрастании периода периодических асимптотически (не)устойчивых орбит последние разбиваются на конечное число классов в соответствии с «асимптотическим» поведением вышеописанных инвариантов.

Для общей теории динамических систем на плоскости с дискретным временем имеются по крайней мере:

а) полиномиальные диффеоморфизмы с рациональными алгебраическими обратными диффеоморфизмами (кандидаты на роль полиномиальных векторных полей на плоскости[1]);

б) распадение периодических асимптотически (не)устойчивых орбит на конечное число классов в соответствии с поведением их инвариантов при возрастании периода (таким образом, аналогом изолированного предельного цикла в проблеме Гильберта является компонента странного аттрактора, лежащая в пределе соответствующего класса).

В результате мы приходим к обобщению проблемы Гильберта о предельных циклах в следующем виде: верно ли, что в дискретном случае для систем вида а) число классов разбиения б) конечно?

---

[1] Это сравнительно узкий класс диффеоморфизмов плоскости.

Пункт а) представляется весьма стеснительным при таком обобщении. К сожалению, что-то аналогичное в обобщении должно присутствовать, чтобы конструкция поднималась на риманову сферу естественным образом, как в проблеме Гильберта о предельных циклах для полиномиальных векторных полей.

Пункт б) можно освободить от деталей, связанных со слабодиссипативной теорией КАМ, при помощи следующих соображений.

Анализ периодов (p-адический анализ). Периоды периодических асимптотически (не)устойчивых орбит имеют сравнительно большие лакуны в множестве натуральных чисел. Их можно раскладывать на простые сомножители. Таким образом, возникают распределения по степеням простых образующих (статистические веса степеней простых чисел). Наличие максимумов (отличных от точки «единица») в этих распределениях указывает на p-адические асимптотики (имеющие топологическую и аналитическую структуры). Это — одна возможность анализа периодических орбит.

Анализ якобиана (марковские свойства). Вдоль периодической асимптотически (не)устойчивой орбиты определен средний якобиан диффеоморфизма, (больший) меньший единицы. Простые прикидки показывают, что с ростом периода средний якобиан линейно (растет) убывает. Коэффициенты линейности разбивают множество периодических асимптотически (не)устойчивых орбит на классы (классу отвечает асимптотически один и тот же коэффициент наклона). В исследованных примерах в области высоких периодов это разбиение сильно коррелирует с разбиением на классы адиабатическими инвариантами слабодиссипативной теории КАМ.

Анализ аналога адиабатических инвариантов. В последние годы выяснился следующий факт (см. [10–15]), позволяющий обобщить понятие адиабатических инвариантов слабодиссипативной теории КАМ.

В окрестности неподвижной особой точки общего положения (точнее, конечно-модальной) диффеоморфизма на плоскости диффеоморфизм или его квадрат включаются в фазовый поток подходящего векторного поля на плоскости. Неподвижной точке диффеоморфизма отвечает особая точка этого векторного поля. Эта особая точка является элементарной, т. е. все ее инварианты выражаются локально в элементарных функциях подходящих координат, C^{∞}-зависящих от исходных.

Ростки этих инвариантов в особой точке могут играть роль адиабатических инвариантов слабодиссипативной теории КАМ.

Осталось заметить, что в окрестности периодической точки диффеоморфизма его подходящая итерация определяет неподвижную точку диффеоморфизма плоскости общего положения (во всяком случае, для периодических асимптотически (не)устойчивых орбит). Таким образом, мы получили возможность в исследованиях заменить адиабатические инварианты слабодиссипативной теории КАМ новыми инвариантами общей теории диффеоморфизмов плоскости.

Вероятно, в ближайшие годы независимо проводимые исследования нескольких групп в разных странах приведут к более ясному пониманию свойств динамических систем на плоскости с дискретным временем. Во всяком случае, сегодня это одно из естественных направлений развития теории динамических систем, связанных с осознанием теоремы существования инвариантной меры по Боголюбову, мер SRB и т. д.

[1] Bogdanov R. I. Positive solution for the II-nd part of the 16th Hilbert's problem. In: Abstracts of Intern. Conf. on Differential and Functional Differential Equations (Moscow, August 16–21, 1999). Moscow, 1999, 18–19.

[2] Bogdanov R. I. Positive solution for the II-nd part of the 16th Hilbert's problem. In: Abstracts of Intern. Conf. on Differential Equations (*Equa*$\frac{\partial i}{\partial t}$*ff 99*) (Berlin, August 1–7, 1999). Berlin, 1999, 10–11.

[3] Богданов Р. И. Решение проблемы Гильберта о конечности автоколебаний в неконсервативных динамических системах на плоскости. Препринт НИИЯФ МГУ № 98-46/547. М.: ПРИНТ, 1998, 64 с.

[4] Arrowsmith D. K., Cartwright J. H. E., Lansbury A. N., Place C. M. The Bogdanov map: bifurcations, mode locking, and chaos in a dissipative system. *Intern. J. Bifurcation and Chaos*, 1993, **3**(4), 803–842.

[5] Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. Пер. с англ. А. Б. Катка под ред. В. М. Алексеева. М.: Мир, 1975.

[6] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[7] Bogdanov R. I. Weakly-dissipative theory by Kolmogorov–Arnol′d–Moser. In: Abstracts of Intern. Conf. on Contemporary Problems in the Theory of Dynamical Systems (Nizhniĭ Novgorod, July 1–6, 1996). Nizhniĭ Novgorod, 1996, 14.

[8] Богданов Р. И. Приложения слабо-диссипативной теории Колмогорова–Арнольда–Мозера. Препринт НИИЯФ МГУ № 96-22/489. М.: ПРИНТ, 1996, 135 с.

[9] Богданов Р. И., Гайдученко И. В., Расторгуев В. А., Тарасов Ю. И. Спектрометрия в слабодиссипативной теории Колмогорова–Арнольда–Мозера. В кн.: Труды семинара «Время, хаос и математические проблемы», вып. 1. М.: Книжный дом «Университет», 1999, 203–224.

[10] Богданов Р. И. Интегралы почти интегрируемых наборов векторных полей на плоскости. *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, 1992, **16**, 70–105.

[11] Богданов Р. И. Локальные относительные интегральные инварианты, связанные с фазовым портретом векторного поля на плоскости. *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, 1994, **17**, 249–265.

[12] Богданов Р. И. Симплектическая орбитальная эквивалентность векторных полей на плоскости (элементарные особые точки). В кн.: Математика и моделирование. Пущино: ОНТИ НЦБИ, 1990, 32–45.

[13] Богданов Р. И. Сингулярные относительные интегральные инварианты и адиабатические процессы термодинамики. В кн.: Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современная математика и ее приложения, т. 47. Тематические обзоры (Динамические системы–7). Деп. в ВИНИТИ, 1997, 35–65.

[14] Богданов Р. И. Новые аналитические нелокальные интегралы в задаче Кеплера. Ижевск: Изд-во Удмуртского государственного университета РАЕН. Регулярная и хаотическая динамика – «R & C D» (в печати).

[15] Богданов Р. И. Нелинейные динамические системы на плоскости и их приложения (с решением проблемы Гильберта). Ижевск: Изд-во Удмуртского государственного университета РАЕН. Регулярная и хаотическая динамика – «R & C D» (в печати).

Р. И. Богданов

1971-11, а также *1989-19*, *1992-11*, *1994-26* и *1994-27*

Имеются две гипотезы Колмогорова 1958 г. относительно поведения размерности минимальных аттракторов (т. е. аттракторов, не содержащих меньших аттракторов), когда число Рейнольдса R стремится к бесконечности —

а) слабая:

$$\max_{\min \mathrm{Attr}} \dim \min \mathrm{Attr} \to \infty \quad \text{при } \nu \to 0;$$

б) сильная:

$$\min_{\min \mathrm{Attr}} \dim \min \mathrm{Attr} \to \infty \quad \text{при } \nu \to 0$$

(см. [1], гл. I), где ν — (кинематическая) вязкость потока.

Первоначальная оценка сверху (у Ладыженской, Ильяшенко, Четаева [2–5]) размерности максимального аттрактора уравнения Навье–Стокса на двумерном торе через вязкость ν имела вид

$$\dim \mathrm{Attr} \leqslant \frac{\mathrm{const}}{\nu^4}.$$

Известна также оценка Темама [6] в произвольной двумерной области M:

$$\dim \mathrm{Attr} \leqslant c(M)R, \qquad R = \frac{\|f\|_{L^2}}{\lambda_1 \nu^2}$$

(здесь f — внешняя сила, а λ_1 — первое собственное число оператора Стокса), которая затем была записана в другой форме Ильиным [7] (см. также [8]).

Наилучшая имеющаяся оценка сверху размерности максимального аттрактора была получена Ильиным [9] (для уравнения Навье–Стокса в двумерной области M при наличии внешней силы f) и выглядит следующим образом:

$$\dim \mathrm{Attr} \leqslant \frac{1}{\pi}\|f\|_{L^2}\frac{\mathrm{vol}(M)}{\nu^2}.$$

Дополнительная литература приведена в книге [1].

[1] Arnol′d V. I., Khesin B. A. Topological Methods in Hydrodynamics. New York: Springer, 1998. (Appl. Math. Sci., 125.) [*Перевод на русский язык*: Арнольд В. И., Хесин Б. А. Топологические методы в гидродинамике. М.: ФАЗИС, готовится к изданию.]

[2] Ладыженская О. А. О конечномерности ограниченных инвариантных множеств для системы Навье–Стокса и других диссипативных систем. *Записки науч. семинаров ЛОМИ*, 1982, **115**, 137–155. (Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций, 14.)

[3] Ильяшенко Ю. С., Четаев А. Н. О размерности аттракторов для одного класса диссипативных систем. *Прикл. матем. механ.*, 1982, **46**(3), 374–381.

[4] Ильяшенко Ю. С. О размерности аттракторов k-сжимающих систем в бесконечномерном пространстве. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1983, № 3, 52–59.

[5] Ильяшенко Ю. С. Слабо сжимающие системы и аттракторы галеркинских приближений уравнений Навье–Стокса на двумерном торе. *Успехи механики*, 1982, **5**(1–2), 31–63. [*Перевод на английский язык*: Il′yashenko Yu. S. Weakly contracting systems and attractors of the Galerkin approximations of the Navier–Stokes equations on a two-dimensional torus. *Selecta Math. Sov.*, 1992, **11**(3), 203–239.]

[6] Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. New York: Springer, 1988. (Appl. Math. Sci., 68.)

[7] Ильин А. А. Частично диссипативные полугруппы, порождаемые системой Навье–Стокса на двумерных многообразиях, и их аттракторы. *Матем. сборник*, 1993, **184**(1), 55–88.

[8] Chepyzhov V. V., Vishik M. I. A Hausdorff dimension estimate for kernel sections of nonautonomous evolution equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 1993, **42**(3), 1057–1076.

[9] Il'yin A. A. Attractors for Navier–Stokes equations in domains with finite measure. *Nonlinear Anal.*, 1996, **27**(5), 605–616.

А. М. Лукацкий

1972

1972-3, а также *1978-1*, *1979-2* и *1980-17*

Задача а) решена Л. Н. Брызгаловой при $n \leqslant 6$ и В. И. Матовым при любом n (см. [1], а также [2–4]), где n — размерность параметра x.

[1] Матов В. И. Топологическая классификация ростков функций максимума и минимакса семейств функций общего положения. *Успехи матем. наук*, 1982, **37**(4), 167–168.

[2] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982, § 10, п. 10.3.5°.

[3] Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В. Особенности. I. Локальная и глобальная теория. Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 6 (Динамические системы 6). М.: ВИНИТИ, 1988, гл. 3, § 3.3.

[4] Арнольд В. И. Теория катастроф, изд. 3-е. М.: Наука, 1990, раздел 10.

В. Д. Седых

1972-7

Гипотеза о трансверсальности была сформулирована В. И. Арнольдом в статье [1].

[1] Арнольд В. И. Моды и квазимоды. *Функц. анализ и его прилож.*, 1972, **6**(2), 12–20. [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное 60. М.: ФАЗИС, 1997, 189–202.]

1972-8

См. статью [1].

[1] Арнольд В. И. Моды и квазимоды. *Функц. анализ и его прилож.*, 1972, **6**(2), 12–20. [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 189–202.]

1972-9, а также *1966-1*

В задаче идет речь об использовании метода усреднения для систем вида

$$\begin{aligned} \dot I &= \varepsilon f(I,\varphi,\varepsilon), && I\in\mathbb{R}^n,\\ \dot\varphi &= \omega(I)+\varepsilon g(I,\varphi,\varepsilon), && \varphi \operatorname{modd} 2\pi\in\mathbb{T}^m. \end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, а правые части системы 2π-периодичны по всем компонентам φ_i вектора φ. Переменные I называют *медленными*, а переменные φ — *быстрыми* или *фазами*. Компоненты вектора ω называют *частотами*. Рассматриваемую систему называют *возмущенной системой в стандартной форме метода усреднения* или *системой с вращающимися фазами*.

Для приближенного описания эволюции медленных переменных I на временах порядка $1/\varepsilon$ метод усреднения предписывает заменить медленную компоненту $I(t)$ решения $(I(t),\varphi(t))$ системы с вращающимися фазами на решение $J(t)$, $J(0)=I(0)$, *усредненной системы*:

$$\dot J=\varepsilon F(J),\qquad F(J)=\frac{1}{(2\pi)^m}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} f(J,\varphi,0)\,d\varphi_1\cdots d\varphi_m.$$

Величина $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1/\varepsilon}|I(t)-J(t)|$ — погрешность метода усреднения при начальных условиях $I(0)$, $\varphi(0)$ на интервале времени $[0;1/\varepsilon]$.

В двухчастотном случае ($m = 2$) в предположении, что отношение частот изменяется с ненулевой скоростью вдоль решений усредненной системы, справедливы следующие оценки.

Погрешность метода усреднения вне множества начальных данных меры $\varkappa > c\sqrt{\varepsilon}$ есть $O(\sqrt{\varepsilon}\ln c^{-1}\varkappa)$ на интервале времени $0 \leqslant t \lesssim 1/\varepsilon$, если дополнительно выполнено некоторое условие общности положения (т. н. условие B) [1–2]. Здесь $c = \mathrm{const} > 0$. Для множества начальных данных меры $\sim \sqrt{\varepsilon}$ метод усреднения может не работать совсем (давать погрешность ~ 1) из-за захватов в резонансы. Можно описать и дальнейшую судьбу захваченных в резонанс фазовых точек [3]. Имеются оценки для случаев, когда условие B заменяется на более слабые условия общности положения [4]. Если ни одно из этих условий общности положения не выполнено, то погрешность метода усреднения вне множества начальных данных меры $\varkappa > c\sqrt{\varepsilon}$ есть $O(\sqrt{\varepsilon}/\varkappa)$; эта оценка получается объединением результатов работ [1–2] и [5 6] (случай, когда имеется одна медленная переменная, рассмотрен в [1–2]). Все оценки выше — неулучшаемые. Подробное обсуждение изложенных результатов приведено в книгах [7–8].

[1] Нейштадт А. И. О прохождении через резонансы в двухчастотной задаче. *ДАН СССР*, 1975, **221**(2), 301–304.

[2] Нейштадт А. И. О некоторых резонансных задачах в нелинейных системах. Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 1976.

[3] Neĭshtadt A. I. Scattering by resonances. *Celest. Mech. Dynam. Astronom.*, 1996/97, **65**(1–2), 1–20.

[4] Прончатов В. Е. Оценка погрешности метода усреднения в двухчастотной задаче. *Матем. сборник*, 1983, **122**(2), 245–264.

[5] Бахтин В. И. О методе усреднения в многочастотных системах. Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 1986.

[6] Бахтин В. И. Усреднение в одночастотной системе общего положения. *Дифф. уравнения*, 1991, **27**(9), 1493–1505.

[7] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, гл. 4.

[8] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 3 (Динамические системы-3). М.: ВИНИТИ, 1985.

А. И. Нейштадт

1972-10, а также *1966-1*

Задача решена для «много» = 2, см. [1] и задачу *1972-9*, так что теперь «много» — это $\geqslant 3$.

Возможность использовать метод усреднения в многочастотном случае вытекает из общего результата об усреднении в системах с быстрыми и медленными переменными [2] (см. также [3]). Оценки погрешности усреднения при различных соотношениях между числом медленных переменных n и числом быстрых переменных m (равным числу частот) содержатся в [4–6]. В частности, если $n \geqslant m$ и отображение частот $I \mapsto \omega(I)$ невырождено, то погрешность метода усреднения вне множества начальных данных меры $\varkappa > c\sqrt{\varepsilon}$ есть $O(\sqrt{\varepsilon}/\varkappa)$ на интервале времени $0 \leqslant t \lesssim 1/\varepsilon$ [4] (обозначения — те же, что и в задаче *1972-9*).

Такая же оценка справедлива, если $n \geqslant m - 1$ и отображение $I \mapsto (\omega_1(I) : \omega_2(I) : \cdots : \omega_m(I))$ пространства медленных переменных в проективное пространство отношений частот невырождено. При $n < m$ образ области пространства медленных переменных при отображении частот $I \mapsto \omega(I)$ есть некоторая поверхность M положительной коразмерности в пространстве частот. Получение оценок точности метода усреднения в этом случае основано на результатах о диофантовых приближениях на M, см. задачу *1970-5*. При $n < m - 1$ целесообразно рассматривать и аналогичную поверхность M' в пространстве отношений частот.

При любых соотношениях между m и n оценка погрешности метода усреднения, приведенная выше, справедлива для почти всех членов типичного семейства отображений частот, зависящих от достаточно большого числа параметров [5]. Эта оценка справедлива и в случае, если M удовлетворяет некоторому условию кривизны, предложенному в [6]. В статье [5] показано, что при типичных отображениях ω вне множества начальных данных меры $\varkappa > c\sqrt{\varepsilon}$ погрешность метода усреднения есть $O(\varepsilon^{1/(p+1)})$ на интервале времени $0 \leqslant t \lesssim 1/\varepsilon$, если $C^p_{n+p} \geqslant n + m$. Нужное условие типичности ω выписано в [5] явно. Отображения ω, не удовлетворяющие этому условию, принадлежат поверхности коразмерности 1 в функциональном пространстве. Приведенные выше оценки неулучшаемы в классе степенных оценок при тех условиях, в которых они получены. Эти условия наложены только на отображение ω. Возможно, что оценки можно улучшить, если наложить некоторые условия общности взаимного расположения резонансных поверхностей $k \cdot \omega = 0$, $k \in \mathbb{Z}^m$, и векторного поля усредненной системы (как это сделано для двухчастотного случая — ср. с задачей *1972-9*). Поэтому поставленную задачу пока нельзя считать решенной.

[1] Арнольд В. И. Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонансы. *ДАН СССР*, 1965, **161**(1), 9–12. [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 69 74.]

[2] Аносов Д. В. Осреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с быстроколеблющимися решениями. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 1960, **24**(5), 721–742.

[3] Kasuga T. On the adiabatic theorem for the Hamiltonian system of differential equations in the classical mechanics, I, II, III. *Proc. Jap. Acad.*, 1961, **37**(7), 366 371, 372–376, 377–382.

[4] Нейштадт А. И. Об осреднении в многочастотных системах. II. *ДАН СССР*, 1976, **226**(6), 1295–1298.

[5] Бахтин В. И. Об усреднении в многочастотных системах. *Функц. анализ и его прилож.*, 1986, **20**(2), 1 7.

[6] Dodson M. M., Rynne B. P., Vickers J. A. G. Averaging in multifrequency systems. *Nonlinearity*, 1989, **2**(1), 137–148.

А. И. Нейштадт

1972-11

Когомологии групп кос серии D (и C) посчитаны В. В. Горюновым [1], а серии E (и остальных исключительных) - М. Сальветти [2].

[1] Горюнов В. В. Когомологии групп кос серий C и D. *Труды Моск. матем. об-ва*, 1981, **42**, 234–242.

[2] Salvetti M. The homotopy type of Artin groups. *Math. Res. Lett.*, 1994, **1**(5), 565 577.

В. А. Васильев

1972-12, а также *1973-2* и *1981-28*

Пусть M — гладкое замкнутое k-мерное подмногообразие в $\mathbb{R}^n$. *Выпуклой оболочкой* многообразия M называется пересечение всех полупространств, содержащих M. Росток выпуклой оболочки в точке ее границы называется *особенностью* выпуклой оболочки. Две особенности называются *эквивалентными*, если одна переводится в другую подходящим диффеоморфизмом пространства $\mathbb{R}^n$.

Рассматривается классификация особенностей выпуклых оболочек многообразий общего положения относительно этой эквивалентности. Многообразия *общего положения* определяются вложениями $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, принадлежащими некоторому открытому всюду плотному подмножеству в пространстве всех вложений M в $\mathbb{R}^n$, снабженном C^∞-топологией.

Кроме тривиальных случаев $k = 0$, $n = 1$, $n = 2$, указанная классификация получена лишь при $n = 3$.

Теорема [1–2]. *Особенности выпуклой оболочки гладкой замкнутой кривой общего положения в* $\mathbb{R}^3$ *эквивалентны росткам в нуле множеств*

$$z \geqslant 0, \quad z \geqslant x|x|, \quad z \geqslant |x|,$$

$$z \geqslant \min_t(t^4 + xt^2 + yt), \quad z \geqslant \min^2(x, y, 0), \quad \{z \geqslant \min^2(x, y, 0), x + y \geqslant 0\}.$$

Теорема [3]. *Особенности выпуклой оболочки гладкой замкнутой поверхности общего положения в* $\mathbb{R}^3$ *эквивалентны росткам в нуле множеств*

$$z \geqslant 0, \qquad z \geqslant x|x|, \qquad z \geqslant \varrho^2(x, y),$$

где $\varrho(x, y)$ *— расстояние от точки* (x, y) *до угла* $y \geqslant \alpha|x|$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$.

Число α является *модулем* (непрерывным инвариантом): особенности с различными α не эквивалентны. При $n > 3$ особенности выпуклых оболочек также имеют модули.

Теорема [4]. *При* $n \geqslant 5$ *существуют гладкие замкнутые подмногообразия коразмерностей* 1 *и* 2 *в* $\mathbb{R}^n$, *некоторые особенности выпуклых оболочек которых имеют функциональные модули, неустранимые при малых деформациях многообразия.*

Теорема [5–7]. *При* $n \geqslant 4$ *для любого натурального* N *существуют гладкие замкнутые* k*-мерные подмногообразия коразмерностей* $3, \ldots, n-1$ *в* $\mathbb{R}^n$ (*так что* $k = n - 3, \ldots, 1$), *некоторые особенности выпуклых оболочек которых имеют не менее* N *функциональных модулей (от* k *переменных), неустранимых при малых деформациях многообразия.*

Особенности выпуклых оболочек гладких замкнутых двумерных и трехмерных поверхностей общего положения в $\mathbb{R}^4$ имеют модули (см. [5–6]). Нормальные формы некоторых особенностей выпуклых оболочек в этих размерностях получены в [8–10]. Более того, в [10] доказано, что особенности выпуклых оболочек гладких замкнутых гиперповерхностей общего положения в $\mathbb{R}^4$ не имеют функциональных модулей. По всей видимости, функциональных модулей нет и у особенностей выпуклых оболочек гладких замкнутых двумерных поверхностей общего положения в $\mathbb{R}^4$ (см. [6]).

[1] Седых В. Д. Особенности выпуклой оболочки кривой в $\mathbb{R}^3$. *Функц. анализ и его прилож.*, 1977, **11**(1), 81–82.

[2] Седых В. Д. Строение выпуклой оболочки пространственной кривой. *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, 1981, **6**, 239–256.

[3] Закалюкин В. М. Особенности выпуклых оболочек гладких многообразий. *Функц. анализ и его прилож.*, 1977, **11**(3), 76–77.

[4] Седых В. Д. Функциональные модули особенностей выпуклых оболочек многообразий коразмерностей 1 и 2. *Матем. сборник*, 1982, **119**(2), 233–247.

[5] Седых В. Д. Модули особенностей выпуклых оболочек. *Успехи матем. наук*, 1981, **36**(5), 191–192.

[6] Седых В. Д. Особенности выпуклых оболочек. *Сиб. матем. ж.*, 1983, **24**(3), 158–175.

[7] Седых В. Д. Выпуклые оболочки и преобразование Лежандра. *Сиб. матем. ж.*, 1983, **24**(6), 122–134.

[8] Седых В. Д. Стабилизация особенностей выпуклых оболочек. *Матем. сборник*, 1988, **135**(4), 514–519.

[9] Седых В. Д. Склейка ласточкиного хвоста и зонтика Уитни в четырехмерной управляемой системе. В кн.: Труды ГАНГ им. И. М. Губкина. М.: Нефть и газ, 1997, 58–68.

[10] Богаевский И. А. Особенности выпуклых оболочек трехмерных гиперповерхностей. *Труды МИРАН им. В. А. Стеклова*, 1998, **221**, 81–100.

В. Д. Седых

1972-16

На фазовой плоскости (в надлежащих координатах) соответствующая фазовая кривая задается уравнением $q^2+3p^2+|p|^3=4$, см. статьи [1–3].

Ср. также комментарий к задаче *1981-14*.

[1] Ройтварф А. А. О движении сплошной среды в силовом поле с коренной особенностью. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1987, № 1, 65 68.

[2] Ройтварф А. А. О двузначном поле скоростей с коренной особенностью. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1988, № 3, 41- 44.

[3] Roytvarf A. A. On the dynamics of a one-dimensional self-gravitating medium. *Physica D*, 1994, **73**(3), 189 204.

В. И. Арнольд

1972-17

Это задача из комментария В. И. Арнольда [1] к статье А. Пуанкаре «Об одной геометрической теореме».

[1] Арнольд В. И. В кн: Пуанкаре А. Избранные труды (в 3-х тт.). Под ред. Н. Н. Боголюбова, В. И. Арнольда и И. Б. Погребысского. Т. II. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел. М.: Наука, 1972, 987–989.

См. комментарий к задаче *1983-3*.

1972-18

Это задача из комментария В. И. Арнольда [1] к статье А. Пуанкаре «Об одной геометрической теореме».

[1] Арнольд В. И. В кн: Пуанкаре А. Избранные труды (в 3-х тт.). Под ред. Н. Н. Боголюбова, В. И. Арнольда и И. Б. Погребысского. Т. II. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел. М.: Наука, 1972, 987 989.

См. комментарий к задаче *1970-10*.

1972-20, а также *1959-1*, *1963-4* и *1994-53*

Эта задача имеет богатую историю, начинающуюся с работ А. Пуанкаре и А. Данжуа. Исключительный прогресс, достигнутый за последние

40 лет в решении проблем, перечисленных в задаче, связан прежде всего с трудами В. И. Арнольда, М. Р. Эрмана, Ж.-К. Иоккоса и Р. Переса-Марко. Перечнем их основных работ, относящихся к тематике задачи,[1] мы и ограничимся в настоящем комментарии.

В. И. Арнольд доказал в 1958 г. (см. [1–3] и предварительную публикацию [4]), что сохраняющий ориентацию аналитический диффеоморфизм окружности с диофантовым[2] числом вращения μ, достаточно близкий к повороту на угол $2\pi\mu$, аналитически приводим к повороту, и сформулировал гипотезу о существовании такого подмножества $M \subset [0;1]$ меры 1, что всякий аналитический диффеоморфизм окружности с числом вращения $\mu \in M$ (необязательно близкий к повороту) аналитически приводим к повороту на угол $2\pi\mu$. История этого открытия описана В. И. Арнольдом в его воспоминаниях [5].

Гипотеза Арнольда была доказана М. Р. Эрманом в 1976 г. [6–8], причем как для аналитических, так и для гладких (класса C^r с $r_0 \leqslant r \leqslant +\infty$) диффеоморфизмов окружности. Множество M, о котором идет речь в гипотезе Арнольда, — это множество диофантовых чисел. Некоторые предварительные результаты были получены Эрманом в [9 11]. В 1985 г. им было найдено значительно более простое доказательство теоремы о приводимости к повороту диффеоморфизмов окружности (близких к повороту) с почти любым числом вращения [12]. Из других работ Эрмана, в которых рассматривается приводимость диффеоморфизмов окружности и смежные вопросы, отметим [13 14].

Результаты М. Р. Эрмана о диффеоморфизмах окружности были существенно уточнены и усилены его учеником Ж.-К. Иоккосом в работах [15–20].[3]

Остальные пункты задачи (о топологических препятствиях к аналитическому выпрямлению диффеоморфизма окружности, к расширению кольца приводимости диффеоморфизма окружности к повороту и к расширению круга приводимости в задаче Зигеля о линеаризации

---

[1] В этих работах также освещается история вопроса и приводятся ссылки на статьи и книги других авторов.

[2] Напомним, что число $\mu \subset \mathbb{R}$ называется *диофантовым*, если существуют такие положительные постоянные τ и γ, что $|q\mu - p| \geqslant \gamma/q^{\tau}$ для всех рациональных p/q ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$). В частности, все диофантовы числа иррациональны. Обратное неверно, но недиофантовы числа образуют множество меры нуль.

[3] См. также статьи И. Кацнельсона и Д. С. Орнстейна [21 22].

ростков голоморфных отображений комплексной плоскости[4] здесь можно еще добавить вопрос о топологических препятствиях к самой линеаризации в задаче Зигеля) относятся к проблеме т. н. *материализации резонансов* в голоморфной динамике. Гипотезы о существовании топологических препятствий (в виде периодических орбит) к приводимости аналитических диффеоморфизмов окружности и линеаризации ростков голоморфных отображений $(\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ были сформулированы В. И. Арнольдом в 1958 г. (см. подробное обсуждение в [24], а также воспоминания [5]). Эти гипотезы были частично доказаны, а частично опровергнуты Р. Пересом-Марко и Ж.-К. Иоккосом.

В заметке [25] Р. Перес-Марко построил примеры ростков голоморфных отображений $(\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, $z \mapsto e^{2\pi i\alpha} z + O(z^2)$ с иррациональным α, которые не приводятся к повороту $w \mapsto e^{2\pi i\alpha} w$ никакой локальной голоморфной заменой $w = z + O(z^2)$ и в то же время не имеют в окрестности нуля отличных от нуля периодических орбит. Более того, в [25] описаны все числа $\alpha \in [0; 1] \setminus \mathbb{Q}$, для которых существуют ростки с указанными свойствами. Множество таких α имеет меру нуль. Эти примеры изложены более подробно в статье [26], где также построены примеры аналитических диффеоморфизмов окружности с иррациональным числом вращения μ, которые не приводятся к повороту на угол $2\pi\mu$ аналитической заменой переменной и в то же время не имеют периодических орбит в комплексной окрестности окружности. В работе [27] Р. Перес-Марко построил примеры конформных отображений $(\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, $z \mapsto e^{2\pi i\alpha} z + O(z^2)$, которые голоморфно приводятся к повороту в окрестности нуля, однолистны в окрестности диска приводимости к повороту и не имеют периодических орбит, отличных от нуля. Более того, граница диска приводимости в этих примерах — C^∞-гладкая жорданова кривая. Вопрос о том, образуют ли числа α, для которых существуют такие отображения, множество меры нуль, насколько известно авторам настоящего комментария, открыт.

Из других работ Переса-Марко, а также из работ Иоккоса, посвященных проблемам линеаризации и структуры ростков голоморфных отображений комплексной плоскости, отметим [28–33].

[1] Арнольд В. И. Об отображениях окружности на себя. Дипломная работа, механико-математический факультет МГУ, 1959.

---

[4] Классические результаты в этой задаче были получены К. Л. Зигелем и А. Д. Брюно, см. подробный обзор Эрмана [23] и ссылки в цитированных ниже работах [25–33] Ж.-К. Иоккоса и Р. Переса-Марко.

[2] Арнольд В. И. Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 1961, **25**(1), 21–86; исправления: 1964, **28**(2), 479–480.

[3] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, §§ 11–12.

[4] Арнольд В. И. Об аналитических отображениях окружности на себя. *Успехи матем. наук*, 1960, **15**(2), 212–214.

[5] Арнольд В. И. От суперпозиций до теории КАМ. В сборнике: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное 60. М.: ФАЗИС, 1997, 727–740.

[6] Herman M. R. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. Thèse d'État, Univ. Paris-Sud, Orsay, 1976.

[7] Herman M. R. Conjugaison C^∞ des difféomorphismes du cercle pour presque tout nombre de rotation. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A–B*, 1976, **283**(8), Aii, A579–A582.

[8] Herman M. R. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 1979, **49**, 5 233.

[9] Herman M. R. Conjugaison C^∞ des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotations satisfait à une condition arithmétique. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A–B*, 1976, **282**(10), Ai, A503 A506.

[10] Herman M. R. La conjugaison des difféomorphismes du cercle à des rotations. *Bull. Soc. Math. France Suppl. Mém.*, 1976, **46**, 181–188 [Supplément au *Bull. Soc. Math. France*, 1976, **104**(2)].

[11] Herman M. R. Mesure de Lebesgue et nombre de rotation. In: Geometry and Topology. Proc. III Latin Amer. School of Math. (Rio de Janeiro, 1976). Editors: J. Palis and M. do Carmo. Berlin: Springer, 1977, 271 293. (Lecture Notes in Math., 597.)

[12] Herman M. R. Simple proofs of local conjugacy theorems for diffeomorphisms of the circle with almost every rotation number. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N. S.)*, 1985, **16**(1), 45–83.

[13] Herman M. R. Résultats récents sur la conjugaison différentiable. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978), Vol. 2. Editor: O. Lehto. Helsinki: Acad. Sci. Fennica, 1980, 811 820.

[14] Herman M. R. Sur les difféomorphismes du cercle de nombre de rotation de type constant. In: Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund (Chicago, 1981), Vol. II. Editors: W. Beckman, A. P. Calderón, R. Fefferman and P. W. Jones. Belmont: Wadsworth, 1983, 708–725.

[15] Yoccoz J.-C. Centralisateur d'un difféomorphisme du cercle dont le nombre de rotation est irrationnel. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A B*, 1980, **291**(9), A523–A526.

[16] Yoccoz J.-C. C^1-conjugaison des difféomorphismes du cercle. In: Geometric Dynamics. Proc. Intern. Symp. at the IMPA (Rio de Janeiro, 1981). Editor: J. Palis, Jr. Berlin: Springer, 1983, 814-827. (Lecture Notes in Math., 1007.)

[17] Yoccoz J.-C. Il n'y a pas de contre-exemple de Denjoy analytique. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1984, **298**(7), 141 144.

[18] Yoccoz J.-C. Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne. *Ann. Sci. École Norm. Sup., Sér.* 4, 1984, **17**(3). 333 359.

[19] Yoccoz J.-C. Centralisateurs et conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle. Thèse d'État, Univ. Paris-Sud, Orsay, 1985.

[20] Yoccoz J.-C. Centralisateurs et conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle. In: Petits Diviseurs en Dimension 1. *Astérisque*, 1995, **231**, 89–242.

[21] Katznelson Y., Ornstein D. S. The differentiability of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle. *Ergod. Theory Dynam. Syst.*, 1989, **9**(4), 643–680.

[22] Katznelson Y., Ornstein D. S. The absolute continuity of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle. *Ergod. Theory Dynam. Syst.*, 1989, **9**(4), 681–690.

[23] Herman M. R. Recent results and some open questions on Siegel's linearization theorem of germs of complex analytic diffeomorphisms of $\mathbb{C}^n$ near a fixed point. In: VIIIth Intern. Congress on Mathematical Physics (Marseille, 1986). Editors: M. Mebkhout and R. Sénéor. Singapore: World Scientific, 1987, 138 184.

[24] Arnol′d V. I. Sur quelques problèmes de la théorie des systèmes dynamiques. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 1994, **4**(2), 209–225. [*Перевод на русский язык в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 533 551.]

[25] Pérez-Marco R. Sur la structure des germes holomorphes non linéarisables. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1991, **312**(7), 533 536.

[26] Pérez-Marco R. Sur les dynamiques holomorphes non linéarisables et une conjecture de V. I. Arnol′d. *Ann. Sci. École Norm. Sup., Sér.* 4, 1993, **26**(5), 565–644.

[27] Pérez-Marco R. Siegel disks with quasi-analytic boundary. Preprint, Université Paris-Sud.
[*Интернет*: `http://topo.math.u-psud.fr/~ricardo`]

[28] Yoccoz J.-C. Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbb{C}, 0)$. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1988, **306**(1), 55 58.

[29] Pérez-Marco R. Centralisateurs non dénombrables de germes de difféomorphismes holomorphes non linéarisables de $(\mathbb{C}, 0)$. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1991, **313**(7), 461–464.

[30] Pérez-Marco R. Solution complète au problème de Siegel de linéarisation d'une application holomorphe au voisinage d'un point fixe (d'après J.-C. Yoccoz). In: *Séminaire Bourbaki*, 1991-92; *Astérisque*, 1992, **206**, Exp. No. 753, 4, 273-310.

[31] Yoccoz J.-C. Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques. In: Petits Diviseurs en Dimension 1. *Astérisque*, 1995, **231**, 3–88.

[32] Pérez-Marco R. Nonlinearizable holomorphic dynamics having an uncountable number of symmetries. *Invent. Math.*, 1995, **119**(1), 67–127.

[33] Pérez-Marco R. Fixed points and circle maps. *Acta Math.*, 1997, **179**(2), 243–294.

А. А. Глуцюк, М. Б. Севрюк

1972-21, а также *1963-5*

В этой задаче речь идет о системах обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{x} = A(\varphi)x; \qquad \varphi \in \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

где ω — постоянный вектор с рационально независимыми компонентами, а A — гладкая матричнозначная функция на $\mathbb{T}^n$. Такие системы называются *линейными уравнениями с квазипериодическими коэффициентами.* Многообразие $\{x = 0\}$ является инвариантным n-мерным тором системы (1), движение на котором квазипериодично с вектором частот ω. Проблема состоит в том, при каких условиях система (1) *приводима*, т. е. существует гладкая замена координат $x = B(\varphi)y$, превращающая (1) в линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{y} = Cy.$$

В случае периодических коэффициентов $n = 1$ (т. е. когда $\{x = 0\}$ — замкнутая траектория периода $2\pi/|\omega|$) классическая теорема Флоке утверждает существование искомой замены координат $x = B(\varphi)y$, если только разрешить матричнозначной функции $B(\varphi)$ либо принимать значения из $\mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$, либо быть 4π-периодической. Известны также условия на $A(\varphi)$, при которых функцию $B(\varphi)$ можно выбрать вещественнозначной и 2π-периодической. Гораздо более сложный случай $n > 1$ исследован далеко не исчерпывающе, несмотря на большое число посвященных ему публикаций. Проблема приводимости линейных уравнений с квазипериодическими коэффициентами обсуждается в общем контексте теории квазипериодических движений в динамических системах в работах В. И. Арнольда [1–2] (в книге [2] приводится и доказательство теоремы Флоке).

В случае $n > 1$ проблема приводимости обычно рассматривается при следующем дополнительном условии *диофантовости* вектора частот ω: существуют такие положительные постоянные τ и γ, что $|q \cdot \omega| \geqslant \gamma |q|^{-\tau}$ при всех $q \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, где $q \cdot \omega = q_1\omega_1 + \dots + q_n\omega_n$ и $|q| = \max(|q_1|, \dots, |q_n|)$. Кроме того, часто предполагается, что функция $A(\varphi)$ аналитична. При $N = 1$ и диофантовом ω система (1) всегда приводима; подробное доказательство этого утверждения для аналитических $A(\varphi)$ приводится, например, в книге [3].

Приводимые системы типичны. Для любого $N \geqslant 2$ при фиксированном диофантовом ω приводимые $A(\varphi)$ заполняют некоторую область в функциональном пространстве всех аналитических матричнозначных функций на n-мерном торе. Впервые это было показано в работах [4–5].

Неприводимые системы типичны. Неприводимые $A(\varphi)$ при $N \geqslant 2$ также заполняют область — во всяком случае, для некоторых ω (есть ли среди таких векторов ω диофантовы, неизвестно) — в функциональном пространстве всех матричнозначных функций (даже в C^0-топологии). Это доказано в работах [6–8]. Более того, неприводимые системы (1), рассмотренные в [6–8], не приводятся к линейному уравнению с постоянными коэффициентами не только никакой линейной квазипериодической заменой координат (с тем же или кратным вектором частот ω), но и никакой линейной почти периодической заменой координат.[1] Иными словами, не существует гладкой почти периодической матричнозначной функции $\widehat{B} = \widehat{B}(t)$, $\widehat{B} : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$, для которой матрица

$$C = \widehat{B}^{-1} A(\omega t) \widehat{B} - \widehat{B}^{-1}\, d\widehat{B}/dt$$

не зависит от t. С другой стороны, автору настоящего комментария не удалось найти в литературе примеры систем (1), неприводимых в обычном смысле (квазипериодическими заменами координат с тем же

---

[1] Функция на $\mathbb{R}$ называется *почти периодической* (в смысле Х. Бора), если она принадлежит замыканию пространства тригонометрических многочленов в метрике равномерной сходимости.

вектором частот ω), но приводимых некоторой почти периодической заменой координат.

Обобщением понятия приводимости систем (1) является почти приводимость. Система $\dot{x} = \widehat{A}(t)x$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$, с произвольной непрерывной матрицей коэффициентов $\widehat{A}(t)$ называется *почти приводимой* (по Б. Ф. Былову), если существует такая постоянная матрица $C' \in \mathrm{gl}(N, \mathbb{R})$, что для любого $\delta > 0$ найдется дифференцируемая замена координат $x = \widehat{B}_\delta(t)y$, удовлетворяющая условиям

$$|\widehat{B}_\delta| < +\infty, \qquad |\widehat{B}_\delta^{-1}| < +\infty, \qquad |d\widehat{B}_\delta/dt| < +\infty$$

(такие линейные замены называются *ляпуновскими*) и переводящая систему $\dot{x} = \widehat{A}(t)x$ в систему $\dot{y} = [C' + \Psi_\delta(t)]y$ с $|\Psi_\delta| < \delta$. Здесь

$$|M| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \max_{i,j=1}^{N} |M_{ij}(t)| \quad \text{для} \quad M\colon \mathbb{R} \to \mathrm{gl}(N, \mathbb{R}).$$

Общая теория почти приводимых систем дифференциальных уравнений изложена, например, в монографии [9].

Не все системы почти приводимы. В статье [10] для любых $n > 1$, $N > 1$ построены примеры систем (1), для которых система $\dot{x} = A(\omega t)x$ не является почти приводимой.

Почти приводимые системы типичны. В пространстве линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами почти приводимые системы типичны. Точная формулировка и доказательство этого утверждения даны в работе [11].

Неприводимые системы типа (1) с дискретным временем (диффеоморфизмы) построены в работах [12–14].

Проблема приводимости систем (1) тесно связана с асимптотическим поведением интегралов от квазипериодических функций. Рассмотрим, например, для простоты случай $N = 1$. Если замена координат $x = \widehat{B}(t)y$ приводит уравнение $\dot{x} = A(\omega t)x$ к виду $\dot{y} = Cy$ с $C = \mathrm{const}$ (здесь $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$), то общее решение уравнения $\dot{x} = A(\omega t)x$ имеет вид $x(t) = c_1 e^{I(t)} - c_2 \widehat{B}(t) e^{Ct}$, где

$$I(t) = \int_0^t A(\omega\tau)\, d\tau.$$

Если среднее функции $A(\varphi)$ по тору $\mathbb{T}^n$ равно нулю, то $I(t) = o(t)$ при $t \to \infty$ согласно теореме Г. Вейля о совпадении временно́го и пространственного средних. Тогда $C = 0$ (если замена $x = \widehat{B}y$ почти периодична), откуда, в свою очередь, вытекает, что $I(t) = O(1)$ при $t \to \infty$. С другой стороны, для многих классов недиофантовых векторов $\omega \in \mathbb{R}^n$ известны примеры гладких функций $A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ с нулевым средним и неограниченным при $t \to \infty$ интегралом $I(t)$, см., например, [15]. Если среднее функции A равно нулю, но интеграл $I(t)$ неограничен при $t \to \infty$, то система (1) не приводится к уравнению с постоянными коэффициентами никакой почти периодической заменой координат.

Из последних работ, в которых рассматриваются асимптотические свойства интегралов от квазипериодических функций, отметим статьи [16 18].

Большое число работ было посвящено исследованию приводимости системы (1) для матрицы $A(\varphi)$, близкой к постоянной. Из них мы отметим монографию [19], а из недавних работ — статьи [20–21]. В работе [22] даны достаточные условия приводимости системы (1) без предположения о близости матрицы $A(\varphi)$ к постоянной.

В случае гамильтоновых систем проблема приводимости тесно связана с наличием достаточного числа первых интегралов, см. [23].

В работе [24] рассматривается т. н. *эффективная* приводимость систем (1). В этой статье предполагается, что $A = A_0 + \varepsilon Q(\varphi, \varepsilon)$, где матрица A_0 постоянна, а ε — малый параметр, и исследуется вопрос о приведении системы (1) к виду

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{y} = [A_0^*(\varepsilon) + R^*(\varphi, \varepsilon)]y,$$

где остаточный член $R^*(\varphi, \varepsilon)$ экспоненциально мал по ε при $\varepsilon \to 0$.

Для «сингулярной» зависимости матрицы A от малого параметра ε эффективная приводимость систем (1) была исследована ранее. Случай $A = \varepsilon Q(\varphi, \varepsilon)$ был рассмотрен, например, в работе [25], а случай $A = \varepsilon^{-1} Q(\varphi, \varepsilon)$ — в работе [26].

Важным частным случаем проблемы приводимости систем (1) является приводимость одномерного уравнения Шрёдингера с квазипериодическим потенциалом. Эта задача рассмотрена, например, в статьях [26–29], а ее дискретный вариант в работе [30].

[1] Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. *Успехи матем. наук*, 1963, **18**(6), 91 192 (см. п. 5 § 2 гл. VI).

[2] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, § 26.

[3] Broer H. W., Huitema G. B., Sevryuk M. B. Quasi-Periodic Motions in Families of Dynamical Systems: Order amidst Chaos. Berlin: Springer, 1996, Sect. 1.5. (Lecture Notes in Math., 1645.)

[4] Гельман А. Е. О приводимости одного класса систем дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. *ДАН СССР*, 1957, **116**(4), 535 537.

[5] Адрианова Л. Я. О приводимости систем n линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. *Вестник ЛГУ, сер. матем., механ. и астроном.*, 1962, **7**(2), 14 24.

[6] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Лин В. Я., Локуциевский О. В. О топологических препятствиях к блочной диагонализации некоторых экспоненциально расщепленных почти периодических систем. М.: Ин-т прикладной математики АН СССР, 1977, препринт № 58.

[7] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Лин В. Я., Локуциевский О. В. О топологических причинах аномального поведения некоторых почти-периодических систем. В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. Под ред. Н. Н. Боголюбова, А. Ю. Ишлинского, В. С. Королюка, О. Б. Лыковой, А. М. Самойленко и А. Н. Шарковского. Киев: Наукова думка, 1977, 54-61.

[8] Бронштейн И. У., Черний В. Ф. Линейные расширения, удовлетворяющие условию Перрона. I; II. *Дифф. уравнения*, 1978, **14**(10), 1739 1751; 1980, **16**(2), 201–207.

[9] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966, гл. VII.

[10] Миллионщиков В. М. Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. *Дифф. уравнения*, 1969, **5**(11), 1979 1983.

[11] Миллионщиков В. М. О типичности почти приводимых систем с почти периодическими коэффициентами. *Дифф. уравнения*, 1978, **14**(4), 634 636.

[12] Herman M. R. Construction d'un difféomorphisme minimal d'entropie topologique non nulle. *Ergod. Theory Dynam. Syst.*, 1981, **1**(1), 65- 76.

[13] Herman M. R. Une méthode pour minorer les exposants de Lyapounov et quelques exemples montrant le caractère local d'un théorème d'Arnol'd et de Moser sur le tore de dimension 2. *Comment. Math. Helvetici*, 1983, **58**(3), 453 502.

[14] Wagener F. O. O. On the skew Hopf bifurcation. PhD Thesis, University of Groningen, 1998.

[15] Спринджук В. Г. Квазипериодические функции с неограниченным неопределенным интегралом. *ДАН БССР*, 1968, **12**(1), 5–9.

[16] Moshchevitin N. G. Recent results on asymptotic behavior of integrals of quasiperiodic functions. In: Dynamical Systems in Classical Mechanics. Editor: V. V. Kozlov. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995, 201–209. (AMS Translations, Ser. 2, 168; Advances in Math. Sci., 25.)

[17] Мощевитин Н. Г. Многомерные диофантовы приближения и динамические системы. *Регулярная и хаотическая динамика*, 1997, **2**(1), 81 95.

[18] Мощевитин Н. Г. Дифференциальные уравнения с почти и условно периодическими коэффициентами: возвращаемость и приводимость. *Матем. заметки*, 1998, **64**(2), 229 237.

[19] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев: Наукова думка, 1969, гл. V.

[20] Jorba À., Simó C. On the reducibility of linear differential equations with quasiperiodic coefficients. *J. Differ. Equations*, 1992, **98**(1), 111 124.

[21] Jorba À., Simó C. On quasiperiodic perturbations of elliptic equilibrium points. *SIAM J. Math. Anal.*, 1996, **27**(6), 1704–1737.

[22] Johnson R. A., Sell G. R. Smoothness of spectral subbundles and reducibility of quasi-periodic linear differential systems. *J. Differ. Equations*, 1981, **41**(2), 262 288.

[23] Kuksin S. B. An infinitesimal Liouville Arnol'd theorem as a criterion of reducibility for variational Hamiltonian equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1992, **2**(3), 259 269.

[24] Jorba À., Ramírez-Ros R., Villanueva J. Effective reducibility of quasiperiodic linear equations close to constant coefficients. *SIAM J. Math. Anal.*, 1997, **28**(1), 178 188.

[25] Treshchëv D. V. An estimate of irremovable nonconstant terms in the reducibility problem. In: Dynamical Systems in Classical Mechanics. Editor: V. V. Kozlov. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995, 91 128. (AMS Translations, Ser. 2, 168; Advances in Math. Sci., 25.)

[26] Treshchëv D. V. On the reducibility of the one-dimensional Schrödinger equation with quasi-periodic potential. In: Dynamical Systems in Classical Mechanics. Editor: V. V. Kozlov. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995, 129–140. (AMS Translations, Ser. 2, 168; Advances in Math. Sci., 25.)

[27] Динабург Е. И., Синай Я. Г. Об одномерном уравнении Шрёдингера с квазипериодическим потенциалом. *Функц. анализ и его прилож.*, 1975, **9**(4), 8–21.

[28] Moser J., Pöschel J. An extension of a result by Dinaburg and Sinaĭ on quasiperiodic potentials. *Comment. Math. Helvetici*, 1984, **59**(1), 39–85.

[29] Eliasson L. H. Floquet solutions for the 1-dimensional quasi-periodic Schrödinger equation. *Commun. Math. Phys.*, 1992, **146**(3), 447–482.

[30] Eliasson L. H. On the discrete one-dimensional quasi-periodic Schrödinger equation and other smooth quasi-periodic skew products. In: Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom. Editor: C. Simó. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999, 55 61. (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 533.)

М. Б. Севрюк

1972-22

Гладкое подмногообразие $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *экстремальным*, если для почти всех точек $x \in M$ (в смысле меры Лебега на M) точная верхняя грань множества таких чисел $w > 0$, что неравенство

$$|q \cdot x + q_0| < |q|^{-w} \qquad (1)$$

имеет бесконечно много целочисленных решений ($q \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, $q_0 \in \mathbb{Z}$), равна n (здесь $q \cdot x = q_1x_1 + \cdots + q_nx_n$ и $|q| = \max(|q_1|, \ldots, |q_n|)$). Более подробно о диофантовых неравенствах типа (1) сказано в комментарии к задаче *1970-5*. Легко показать, что любая открытая область пространства $\mathbb{R}^n$ экстремальна. Знаменитая гипотеза Малера (K. Mahler) 1932 г. (точнее, «вещественная» часть этой гипотезы) заключалась в том, что кривая $\{(t, t^2, \ldots, t^n) \mid t \in \mathbb{R}\}$ экстремальна. Гипотеза Малера была доказана В. Г. Спринджуком, см. [1–2].

Первая теорема об экстремальности общих подмногообразий принадлежит В. Шмидту, который в работе [3] доказал экстремальность кривых на плоскости класса C^3, кривизна которых почти всюду отлична от нуля. Аналогичная теорема для кривых в трехмерном пространстве была получена через 30 лет в статьях [4–5].

Экстремальность подмногообразий $M^m \subset \mathbb{R}^n$ общего положения при любых n и $m \geqslant n/2$ доказана в работах [6–8], а при $m(m+3)/2 > n$ — в работах [9–10].

Подробный обзор теории экстремальных многообразий до конца 70-х годов приведен в книге В. Г. Спринджука [7] и в его статье [11].

Экстремальность подмногообразий $M^m \subset \mathbb{R}^n$ общего положения без каких-либо ограничений на m и n получена в работе [12]. Результаты Д. Я. Клейнбока и Г. А. Маргулиса [12] и другие недавние достижения в теории диофантовых приближений подробно обсуждаются в книге [13], гл. IV.

[1] Спринджук В. Г. Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 1965, **29**(2), 379–436.

[2] Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск: Наука и техника, 1967.

[3] Schmidt W. Metrische Sätze über simultane Approximation abhängiger Großen. *Monatsh. Math.*, 1964, **68**(2), 154–166.

[4] Бересневич В. В., Берник В. И. Экстремальные гладкие кривые в трехмерном эвклидовом пространстве. *ДАН Беларуси*, 1994, **38**(3), 9–12.

[5] Beresnevich V. V., Bernik V. I. On a metrical theorem of W. Schmidt. *Acta Arithm.*, 1996, **75**(3), 219 233.

[6] Спринджук В. Г. Метод тригонометрических сумм в метрической теории диофантовых приближений зависимых величин. *Труды МИАН им. В. А. Стеклова*, 1972, **128**(2), 212–228.

[7] Спринджук В. Г. Метрическая теория диофантовых приближений. М.: Наука, 1977.

[8] Берник В. И., Ковалевская Э. И. Диофантовы приближения на многообразиях размерности n в $\mathbb{R}^{2n}$. *ДАН БССР*, 1990, **34**(12), 1061–1064.

[9] Dodson M. M., Rynne B. P., Vickers J. A. G. Metric Diophantine approximation and Hausdorff dimension on manifolds. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1989, **105**(3), 547 558.

[10] Dodson M. M., Rynne B. P., Vickers J. A. G. Khintchine-type theorems on manifolds. *Acta Arithm.*, 1991, **57**(2), 115–130.

[11] Спринджук В. Г. Достижения и проблемы теории диофантовых приближений. *Успехи матем. наук*, 1980, **35**(4), 3–68.

[12] Kleinbock D. Ya., Margulis G. A. Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds. Preprint 97-008, SFB 343, Universität Bielefeld, 1997; *Ann. Math., Ser.* 2, 1998, **148**(1), 339–360.

[13] Старков А. Н. Динамические системы на однородных пространствах. М.: ФАЗИС, 1999.

М. Б. Севрюк

1972-27, а также *1980-14*, *1981-12*, *1984-15* и *1988-16*

В. И. Арнольд [1] доказал, что универсальная алгебраическая функция $z^k + a_1 z^{k-1} + \cdots + a_{k-1} z + a_k = 0$ от k переменных не представима в виде полной суперпозиции алгебраических функций от l переменных при $l < k - D_2(k)$, где $D_2(k)$ — число единиц в двоичной записи числа k. В. Я. Лин [2–3] улучшил этот результат, показав, что $k - D_2(k)$ здесь можно заменить на $k - 1$.

См. также задачи *1993-27* и *1998-9*.

[1] Арнольд В. И. Топологические инварианты алгебраических функций. II. *Функц. анализ и его прилож.*, 1970, **4**(2), 1–9.

[2] Лин В. Я. О суперпозициях алгебраических функций. *Функц. анализ и его прилож.*, 1972, **6**(3), 77–78.

[3] Лин В. Я. Суперпозиции алгебраических функций. *Функц. анализ и его прилож.*, 1976, **10**(1), 37–45.

F. Napolitano

1972-33

Это задача из комментария В. И. Арнольда [1] к статье А. Пуанкаре «Об одной геометрической теореме».

[1] Арнольд В. И. В кн: Пуанкаре А. Избранные труды (в 3-х тт.). Под ред. Н. Н. Боголюбова, В. И. Арнольда и И. Б. Погребысского. Т. II. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел. М.: Наука, 1972, 987-989.

См. комментарий к задаче *1983-3*.

1973

1973-2

См. комментарии к задачам *1972-12* и *1981-28*.

1973-3

Неожиданное применение в математической экономике нашла теория лагранжевых и лежандровых отображений. В работе [1] эта теория позволила ответить на вопрос, поставленный известным специалистом в области математической экономики Иваром Экеландом, о минимальном количестве членов в нормальной форме Дарбу для заданного ростка 1-формы, если на входящие в них функции наложить условия выпуклости.

[1] Zakalyukin V. M. Concave Darboux theorem. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1998, **327**(7), 633 638.

В. М. Закалюкин

1973-4, а также *1976-31* и *1994-37*

См. статьи [1–4].

[1] Арнольд В. И. О локальных задачах анализа. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1970, № 2, 52–56.

[2] Арнольд В. И. Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости и проблемы топологической классификации особых точек аналитических систем дифференциальных уравнений. *Успехи матем. наук*, 1970, **25**(2), 265 266.

[3] Арнольд В. И. Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости по Ляпунову и проблемы топологической классификации особых точек аналитической системы дифференциальных уравнений. *Функц. анализ и его прилож.*, 1970, **4**(3), 1–9.

[4] Arnol′d V. I. Problèmes résolubles et problèmes irrésolubles analytiques et géométriques. In: Passion des Formes. Dynamique Qualitative Sémiophysique et Intelligibilité. Dédié à R. Thom. Fontenay-St Cloud: ENS Éditions, 1994, 411 417; In: Formes et Dynamique, Renaissance d'un Paradigme. Hommage à René Thom. Paris: Eshel, 1995. [*Перевод на русский язык в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное 60. М.: ФАЗИС, 1997, 577–582.]

1973-7, а также *1975-6*, *1975-24* и *1976-13*

Гладкость страта $\mu = \text{const}$ доказана для функций двух переменных (J. Wahl, 1971; см. [1]). С другой стороны, для функций большего числа переменных гладкость страта $\mu = \text{const}$, вообще говоря, не имеет места [2]. Эти результаты и смежные вопросы обсуждаются в книге [3].

[1] Brieskorn E. Special singularities-resolution, deformation and monodromy. Lecture notes prepared in connection with the summer institute on algebraic geometry held at Humboldt State Univ. Arcata, California. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1974.

[2] Luengo I. The μ-constant stratum is not smooth. *Invent. Math.*, 1987, **90**(1), 139–152.

[3] Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В. Особенности. I. Локальная и глобальная теория. Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 6 (Динамические системы- 6). М.: ВИНИТИ, 1988, гл. 2, § 1.11.

С. М. Гусейн-Заде

1973-8

Полунепрерывность (собственной) модальности доказана А. М. Габриэловым [1].

[1] Габриэлов А. М. Бифуркации, диаграммы Дынкина и модальность изолированных особенностей. *Функц. анализ и его прилож.*, 1974, **8**(2), 7-12.

С. М. Гусейн-Заде

1973-11

Гипотеза о том, что неотрицательность коэффициентов многочлена Пуанкаре достаточна для существования невырожденной квазиоднородной функции с данными весами, опровергнута контрпримером Б. М. Ивлева с весами $(1, 24, 33, 58, 265)$, ср. [1].

[1] Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В. Особенности. I. Локальная и глобальная теория. Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 6 (Динамические системы-6). М.: ВИНИТИ, 1988, гл. 1, § 3.4.

В. И. Арнольд

1973-15, а также *1981-8* и *1984-11*

См. статьи [1 3].

[1] Арнольд В. И. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют. *Успехи матем. наук*, 1978, **33**(5), 91 105.

[2] Арнольд В. И. Лагранжевы и лежандровы кобордизмы. I и II. *Функц. анализ и его прилож.*, 1980, **14**(3), 1 13; 1980, **14**(4), 8–17.

[3] Barannikov S. A. The framed Morse complex and its invariants. In: Singularities and Bifurcations. Editor: V. I. Arnol'd. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994, 93–115. (Advances in Soviet Math., 21.)

1973-16

См. комментарий к задаче *1975-20*.

1973-17

В случае комплексных переменных страты $\mu = \mathrm{const}$ — это в точности наборы неприводимых кривых с одинаковыми показателями Пюизо и одинаковыми порядками касания между соответствующими компонентами (этот результат был получен независимо многими авторами, включая А. Н. Варченко и J. Wahl'a, хотя, вероятно, в другой формулировке был известен гораздо раньше). Все эти страты гладкие. В случае $\mathbb{R}^2$ все страты представляют собой вещественные формы комплексных. Они описываются, в частности, тем, какие из комплексных компонент кривой в действительности вещественны (т. е. имеют одномерное пересечение с $\mathbb{R}^2$), а какие нет.

Любой комплексный страт $\mu = \mathrm{const}$ функций в $\mathbb{C}^2$ содержит вполне вещественного представителя (т. е. такого, все компоненты которого вещественны), см. [1–2].

[1] Гусейн-Заде С. М. Диаграммы Дынкина особенностей функций двух переменных. *Функц. анализ и его прилож.*, 1974, **8**(4), 23-30.

[2] A'Campo N. Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes. I. *Math. Ann.*, 1975, **213**(1), 1–32.

В. А. Васильев

* * *

1973-17

Такое описание отсутствует.

С. М. Гусейн-Заде

1973-19

Согласно теореме A'Campo [1] морсификации с ровно двумя критическими значениями существуют только у простых особенностей (неморсовских).

[1] A'Campo N. Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes. II. In: Proc. International Congress of Mathematicians (Vancouver, 1974), V. 1. Montreal: Canad. Math. Congress, 1975, 395–404.

В. А. Васильев

1973-23

Вопрос до сих пор открыт. Для некоторого класса векторных полей в полнотории топологическая инвариантность асимптотического инварианта Хопфа [1] была установлена в работе [2]; см. также обзор в книге [3].

[1] Арнольд В. И. Асимптотический инвариант Хопфа и его приложения. В кн.: Материалы Всесоюзной школы по дифференциальным уравнениям с бесконечным числом независимых переменных и по динамическим системам с бесконечным числом степеней свободы (Дилижан, 21 мая – 3 июня 1973 г.). Ереван: АН Армянской ССР, 1974, 229–256. [*Перепечатано с добавлениями в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное-60. М.: ФАЗИС, 1997, 215–236.] [*Английское издание*: *Selecta Math. Sov.*, 1986, **5**(4), 327–345.]

[2] Gambaudo J.-M., Ghys É. Enlacements asymptotiques. *Topology*, 1997, **36**(6), 1355–1379.

[3] Arnol′d V. I., Khesin B. A. Topological Methods in Hydrodynamics. New York: Springer, 1998. (Appl. Math. Sci., 125.) [*Перевод на русский язык*: Арнольд В. И., Хесин Б. А. Топологические методы в гидродинамике. М.: ФАЗИС, готовится к изданию.]

В. И. Арнольд, Б. А. Хесин

1973-24

Связь асимптотического инварианта Хопфа с кручением Рея–Зингера обсуждалась в работе [1], см. также книгу [2].

[1] Schwarz A. S. The partition function of degenerate quadratic functional and Ray–Singer invariants. *Lett. Math. Phys.*, 1977/78, **2**(3), 247–252.

[2] Arnol′d V. I., Khesin B. A. Topological Methods in Hydrodynamics. New York: Springer, 1998. (Appl. Math. Sci., 125.) [*Перевод на русский язык*: Арнольд В. И., Хесин Б. А. Топологические методы в гидродинамике. М.: ФАЗИС, готовится к изданию.]

Б. А. Хесин

1973-25

Наличие зацепленных траекторий препятствует релаксации заданного поля к полю, имеющему сколь угодно малую энергию. Впервые это было показано В. И. Арнольдом [1] на основе асимптотического инварианта Хопфа. Согласно теореме Фридмана [2], если для бездивергентного поля ξ в трехмерном евклидовом пространстве имеет место существенное зацепление ([3], гл. III, определение 2.3) по полноториям объема V, то выполняется следующая оценка снизу для энергии поля E:

$$E(\xi) > \frac{(6/125)^{2/3}}{\pi^{8/3}} V^{5/3} \approx 0{,}00624 \cdot V^{5/3},$$

см. также [3], гл. III, теорему 2.5. Аналогичная оценка с той же константой остается справедливой для полей на произвольном трехмерном римановом многообразии.

[1] Арнольд В. И. Асимптотический инвариант Хопфа и его приложения. В кн.: Материалы Всесоюзной школы по дифференциальным уравнениям с бесконечным числом независимых переменных и по динамическим системам с бесконечным числом степеней свободы (Дилижан, 21 мая 3 июня 1973 г.). Ереван: АН Армянской ССР, 1974, 229 256. [*Перепечатано с добавлениями в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное 60. М.: ФАЗИС, 1997, 215–236.] [*Английское издание*: *Selecta Math. Sov.*, 1986, **5**(4), 327–345.]

[2] Freedman M. H., He Z.-X. Links of tori and the energy of incompressible flows. *Topology*, 1991, **30**(2), 283 287.

[3] Arnol′d V. I., Khesin B. A. Topological Methods in Hydrodynamics. New York: Springer, 1998. (Appl. Math. Sci., 125.) [*Перевод на русский язык*: Арнольд В. И., Хесин Б. А. Топологические методы в гидродинамике. М.: ФАЗИС, готовится к изданию.]

А. М. Лукацкий

1973-26

Парадокс релаксации обсуждается в статье В. И. Арнольда [1]. В общем случае поля релаксируют к экстремалям функционала энергии на орбитах присоединенного представления. Экстремали функционала энергии на орбитах присоединенного и коприсоединенного представлений группы диффеоморфизмов совпадают ([2], гл. II, теорема 2.10). Последние же суть хорошо известные изозавихренные поля, которые являются собственными для оператора rot. Как правило, такие поля неинтегрируемы — это класс так называемых бессиловых полей (т. е. полей v, удовлетворяющих условию $\operatorname{rot} v \times v = 0$ или $\operatorname{rot} v = fv$, причем неинтегрируемость имеет место, как правило, при $f = \mathrm{const}$, как, например, для ABC-полей на $\mathbb{T}^3$, если ни один из параметров A, B, C не обращается в нуль ([2], гл. II, пример 1.9)).

Предельное поле может быть ненулевым, если у исходного есть препятствия к релаксации энергии (например, таким препятствием может являться существенное зацепление или эллиптическая заузленная траектория ([2], гл. III, замечание 2.8)). К нулевому полю релаксируют поля со сравнительно хорошим устройством траекторий (имеющие замкнутые попарно незацепленные траектории). Возможна также релаксация к нулю для поля с замкнутой заузленной гиперболической траекторией ([2], гл. III, § 3).

[1] Арнольд В. И. Асимптотический инвариант Хопфа и его приложения. В кн.: Материалы Всесоюзной школы по дифференциальным уравнениям с бесконечным числом независимых переменных и по динамическим системам с бесконечным числом степеней свободы (Дилижан, 21 мая – 3 июня 1973 г.). Ереван: АН Армянской ССР, 1974, 229–256. [*Перепечатано с добавлениями в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное-60. М.: ФАЗИС, 1997, 215–236.] [*Английское издание*: *Selecta Math. Sov.*, 1986, **5**(4), 327–345.]

[2] Arnol'd V. I., Khesin B. A. Topological Methods in Hydrodynamics. New York: Springer, 1998. (Appl. Math. Sci., 125.) [*Перевод на русский язык*: Арнольд В. И., Хесин Б. А. Топологические методы в гидродинамике. М.: ФАЗИС, готовится к изданию.]

А. М. Лукацкий

* * *

1973-26

Один из способов разрешить парадокс релаксации — допустить слабую сжимаемость жидкости, а затем перейти к «несжимаемому пределу», см. [1]. Особенности полей-экстремалей несжимаемой вариационной задачи численно исследовались, например, Н. К. Moffatt'ом и его школой. См. также комментарий к задаче *1986-12* и обзор и ссылки в книге [2].

[1] Morgulis A., Yudovich V. I., Zaslavsky G. M. Compressible helical flows. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1995, **48**(5), 571 582.

[2] Arnol'd V. I., Khesin B. A. Topological Methods in Hydrodynamics. New York: Springer, 1998. (Appl. Math. Sci., 125.) [*Перевод на русский язык*: Арнольд В. И., Хесин Б. А. Топологические методы в гидродинамике. М.: ФАЗИС, готовится к изданию.]

Б. А. Хесин

1973-27

Утверждение об особенности A_k доказано Э. Лойенгой [1] и независимо О. В. Ляшко (см. [2–4]). Аналогичная задача о пространстве многочленов, симметричных относительно действия циклической группы, была решена независимо в совместной неопубликованной работе И. М. Пака и А. Е. Постникова и, чуть позднее, — А. А. Глуцюком [5] (см. также библиографию к [5]). Получена комбинаторная интерпретация накрытия, ставящего в соответствие каждому (нормированному) многочлену такого типа набор его критических значений, и подсчитано число его листов. Комбинаторные интерпретации, полученные в каждой из работ, различны.

[1] Looijenga E. J. N. The complement of the bifurcation variety of a simple singularity. *Invent. Math.*, 1974, **23**(2), 105 116.

[2] Арнольд В. И. Критические точки функций и классификация каустик. *Успехи матем. наук*, 1974, **29**(3), 243 244. [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное 60. М.: ФАЗИС, 1997, 213 214.]

[3] Ляшко О. В. Геометрия бифуркационных диаграмм. *Успехи матем. наук*, 1979, **34**(3), 205–206.

[4] Ляшко О. В. Геометрия бифуркационных диаграмм. В кн.: Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики, т. 22. М.: ВИНИТИ, 1983, 94- 129.

[5] Глуцюк А. А. Аналог теоремы Кэли для циклически симметричных связных графов с одним циклом, связанных с обобщенными накрытиями Ляшко Лойенги. *Успехи матем. наук*, 1993, **48**(2), 173–174.

А. А. Глуцюк

* * *

1973-27

Автору настоящего комментария неизвестно, чтобы решение этой задачи было записано. Серия D соответствует случаю тригонометрических многочленов (см. [1]) с одним из полюсов 1-го порядка и трудностей не представляет. (В. В. Горюнов относит соответствующее утверждение к фольклору. Возможно, оно появится в его совместной статье с аспиранткой.) Особенности серии E отвечают некоторым стратам в подходящем пространстве тригонометрических многочленов. Кратности отображения Ляшко–Лойенги на соответствующих стратах, по-видимому, не посчитаны. Интерпретацию этих кратностей в виде графов см., например, в работе [2]. Дополнительная литература приведена в комментариях к задаче *1970-15*.

[1] Арнольд В. И. Топологическая классификация комплексных тригонометрических многочленов и комбинаторика графов с одинаковым числом вершин и ребер. *Функц. анализ и его прилож.*, 1996, **30**(1), 1 17.

[2] Звонкин Д. А., Ландо С. К. О кратностях отображения Ляшко–Лойенги на стратах дискриминанта. *Функц. анализ и его прилож.*, 1999, **33**(3), 21 34.

С. К. Ландо

1974

1974-2

См. статью [1].

[1] Гивенталь А. Б. Лагранжевы вложения поверхностей и раскрытый зонтик Уитни. *Функц. анализ и его прилож.*, 1986, **20**(3), 35 41.

1974-4

Такая задача — классификация простых особенностей лагранжевых проектирований особых лагранжевых многообразий — найдена А. Б. Гивенталем [1]. Первым ввел в теорию особенностей некристаллографические группы Коксгера О. П. Щербак [2].

[1] Гивенталь А. Б. Особые лагранжевы многообразия и их лагранжевы отображения. В кн: Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, т. 33. М.: ВИНИТИ, 1988, 55 112.

[2] Щербак О. П. Волновые фронты и группы отражений. *Успехи матем. наук*, 1988, **43**(3), 125 160.

В. И. Арнольд

1974-6

Успехи в этой области, достигнутые к настоящему времени, описаны в работах [1–7].

[1] Арнольд В. И. Первые шаги симплектической топологии. *Успехи матем. наук*, 1986, **41**(6), 3- 18. [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 365–389.]

[2] Arnol'd V. I. First steps of symplectic topology. In: VIIIth Intern. Congress on Mathematical Physics (Marseille, 1986). Editors: M. Mebkhout and R. Sénéor. Singapore: World Scientific, 1987, 1 -16.

[3] Арнольд В. И. Таинственные математические троицы. Принцип топологической экономии в алгебраической геометрии. М.: Изд-во МЦНМО, МК НМУ, 1997.

[4] Arnol'd V. I. Symplectization, complexification and mathematical trinities. The second Toronto lecture (1997). *Fields Institute Commun.* (to appear); CEREMADE (UMR 7534), Université Paris-Dauphine, № 9815, 04/03/1998. [*Интернет*: `http://www.botik.ru/~duzhin/arnold/arn-papers.html`]

[5] Arnol'd V. I. Polymathematics: is mathematics a single science or a set of arts? CEREMADE (UMR 7534), Université Paris-Dauphine, № 9911, 10/03/1999; In: Mathematics Its Frontiers and Perspectives. Intern. Math. Union, 2000 (to appear).
[*Интернет*: `http://www.botik.ru/~duzhin/arnold/arn-papers.html`]

[6] Khesin B. A. Informal complexification and Poisson structures on moduli spaces. In: Topics in Singularity Theory. V. I. Arnol'd's 60th Anniversary Collection. Editors: A. Khovanskiĭ, A. Varchenko and V. Vassiliev. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997, 147–155. (AMS Translations, Ser. 2, 180; Advances in Math. Sci., 34.)

[7] Khesin B. A., Rosly A. A. Holomorphic linking and homology of complex manifolds (in preparation).

1974-7

Для групп отражений эта задача решена О. В. Ляшко [1]. Список унимодальных особенностей, полученный Ляшко в [1], дополнен в [2] (дополнение относится к случаю края типа A_2 и критической точки типа $\widetilde{A}_3$).

[1] Ляшко О. В. Классификация критических точек функций на многообразии с особым краем. *Функц. анализ и его прилож.*, 1983, **17**(3), 28–36.

[2] Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В. Особенности. II. Классификация и приложения. Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 39 (Динамические системы 8). М.: ВИНИТИ, 1989, гл. 1, § 1.6.

С. В. Чмутов

1974-8

Движущийся волновой фронт может перестраиваться с течением времени. Рассмотрим, например, распространение возмущения внутрь эллипса с единичной скоростью. Фронтами в этом случае будут внутренние эквидистанты эллипса. С течением времени такой фронт перестраивается: сначала это гладкая кривая, затем у фронта появляются четыре точки возврата и две точки самопересечения, последние вскоре исчезают, а затем снова появляются, после чего фронт снова становится гладким.

Требуется исследовать локальные перестройки волнового фронта, движущегося в n-мерном пространстве и зависящего от времени общим образом. Поставленная задача при $n \leqslant 5$ была решена в [1]. Оказалось, что при этом ограничении список перестроек конечен с точностью до гладко зависящих от времени диффеоморфизмов объемлющего пространства и сдвигов времени. Рисунки перестроек при $n = 2$ и $n = 3$ можно найти, например, в [2–4].

При $n = 6$ устойчивым образом появляется перестройка класса $P_8^{\cdot}$ в обозначениях п. 21.8 из [4]. Эта перестройка заведомо имеет один числовой модуль, однако неизвестно, имеет ли она функциональные модули. Некоторые перестройки, появляющиеся устойчивым образом при $n \geqslant 6$, исследованы в [5–6], но перестройка $P_8^{\cdot}$ в их число не входит.

В приложениях часто встречается случай, когда движущийся фронт зависит от времени не общим образом, а однозначно определяется текущим моментом времени и *начальным условием* — фронтом в выделенный момент времени. Такие семейства фронтов называются *эволюционными*. Например, эквидистанты гладкой гиперповерхности образуют эволюционное семейство фронтов, зависящих от расстояния и самой гиперповерхности (начального условия). В [7] доказана теорема трансверсальности, применимая во многих приложениях и, в частности, утверждающая, что эволюционирующий во времени фронт при $n \leqslant 5$ и типичном начальном условии испытывает лишь перестройки, описанные в [1]. Однако список перестроек, реализующихся в данном эволюционном семействе при данном n, может быть меньше общего: например, если фронт не зависит от времени, то перестроек вообще не происходит.

В заключение — некоторые строгие определения. Гладкое многообразие, снабженное полем гиперплоскостей, удовлетворяющим условию максимальной неинтегрируемости в каждой точке, называется *контактным*. *Лежандрово подмногообразие* контактного многообразия — это гладкое интегральное подмногообразие максимально возможной размерности (равной половине размерности контактной гиперплоскости). *Лежандровым расслоением* называется гладкое расслоение, пространство которого снабжено контактной структурой, а слои — лежандровы подмногообразия. Пусть $L_t^{n-1} \subset E^{2n-1}$ —

лежандрово подмногообразие в пространстве лежандрова расслоения $\pi\colon E^{2n-1} \to B^n$, гладко зависящее от времени t. Семейством фронтов, зависящих от времени, называется семейство (вообще говоря, особых) гиперповерхностей $\pi(L_t^{n-1}) \subset B^n$. Теорема из [1] справедлива, если семейство лежандровых многообразий L_t^{n-1} зависит от времени общим образом, а теорема из [7] применима, если $L_t^{n-1} = g_t(L_0^{n-1})$, где $L_0^{n-1} \subset E^{2n-1}$ — типичное лежандрово подмногообразие (начальное условие), а $g_t\colon E^{2n-1} \to E^{2n-1}$ — фиксированное семейство гладких диффеоморфизмов, сохраняющих контактную структуру и гладко зависящих от времени.

[1] Arnol'd V. I. Wave front evolution and equivariant Morse lemma. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1976, **29**(6), 557–582; correction: 1977, **30**(6), 823. [*Перевод на русский язык в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное 60. М.: ФАЗИС, 1997, 289–318.]

[2] Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996. [*Английское издание* 1990 г.]

[3] Арнольд В. И. Теория катастроф, изд. 3-е. М.: Наука, 1990.

[4] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982.

[5] Закалюкин В. М. Перестройки волновых фронтов, зависящих от одного параметра. *Функц. анализ и его прилож.*, 1976, **10**(2), 69–70.

[6] Закалюкин В. М. Перестройки фронтов, каустик, зависящих от параметра, версальность отображений. В кн.: Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики, т. 22. М.: ВИНИТИ, 1983, 56–93.

[7] Богаевский И. А. Перестройки фронтов в эволюционных семействах. *Труды МИРАН им. В. А. Стеклова*, 1995, **209**, 65–83.

И. А. Богаевский

1975

1975-6

См. комментарии к задачам *1973-7* и *1976-16*.

1975-7

Да, могут. В работе [1] построены два страта $\mu = \text{const}$ особенностей функций $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$, не пересекающихся с множеством вещественных функций (т. е. отображающих $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}$). Эти два страта переводятся один в другой комплексным сопряжением, в частности, они топологически эквивалентны.

[1] Васильев В. А., Серганова В. В. О числе вещественных и комплексных модулей особенностей гладких функций и реализаций матроидов. *Матем. заметки*, 1991, **49**(1), 19 27.

В. А. Васильев

1975-8, а также *1980-11*

Задача о полунепрерывности спектра особенности и показателя особости решена Варченко [1–3] и Стинбринком [4].

См. также комментарий к задаче *1979-3*.

[1] Варченко А. Н. О полунепрерывности комплексного показателя особости. *Функц. анализ и его прилож.*, 1983, **17**(4), 77–78.

[2] Варченко А. Н. О полунепрерывности спектра и оценке сверху числа особых точек проективной гиперповерхности. *ДАН СССР*, 1983, **270**(6), 1294–1297.

[3] Варченко А. Н. Об изменении дискретных характеристик критических точек функций при деформациях. *Успехи матем. наук*, 1983, **38**(5), 126–127.

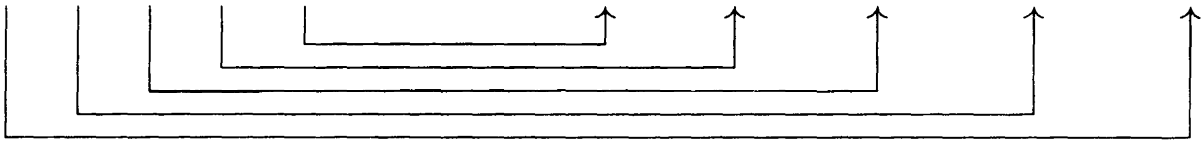
[4] Steenbrink J. H. M. Semicontinuity of the singularity spectrum. *Invent. Math.*, 1985, **79**(3), 557 565.

С. В. Чмутов

1975-9

Забавная нумерология наблюдается также у наихудших показателей особости $\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$:

										$k = 3$	$k = 3$	$k > 3$
l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	10
N	2	3	4	6	8	12	∞	∞	-24	-16	-12	-8	-6



(здесь l — число параметров, а k — число переменных), см. теорему XX в [1] (и [2], с. 256).

Какие-либо результаты о значении $s(32)$ или исследования нумерологии последовательности $s(\mu)$ автору настоящего комментария неизвестны.

[1] Арнольд В. И. Критические точки гладких функций и их нормальные формы. *Успехи матем. наук*, 1975, **30**(5), 3–65.

[2] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997.

В. А. Васильев

1975-12

Доказано, что если для (вещественного) ростка f кривая нулевого уровня $f = 0$ вещественна (т. е. не имеет пар комплексно сопряженных компонент), то f имеет вещественную морсификацию (С. М. Гусейн-Заде, N. A'Campo). Более сильные утверждения отсутствуют. Некоторые ссылки приведены в книге [1].

[1] Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В. Особенности. I. Локальная и глобальная теория. Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 6 (Динамические системы–6). М.: ВИНИТИ, 1988, гл. 2, § 2.1.

С. М. Гусейн-Заде

1975-13

Насколько известно автору настоящего краткого комментария, задача решена только при $n = 2$ (см., например, [1], а также [2]).

[1] Чмутов С. В. Спектр и эквивариантные деформации критических точек. *Успехи матем. наук*, 1984, **39**(4), 113–114.

[2] Chmutov S. V. Extremal distributions of critical points and critical values. In: Singularity Theory (Trieste, 1991). Editors: D. T. Lê, K. Saito and B. Teissier. River Edge, NJ: World Sci. Publ., 1995, 192–205.

С. В. Чмутов

1975-18

Эта задача решена О. В. Ляшко [1].

[1] Ляшко О. В. Распадения простых особенностей функций. *Функц. анализ и его прилож.*, 1976, **10**(2), 49–56.

В. А. Васильев

1975-19

Эта задача не решена и, по-видимому, ответ довольно сложен. При $n = 1$ конечная порожденность рассматриваемых групп когомологий (в каждой фиксированной размерности) доказана Н. А. Некрасовым [1], а доказательство для любого n практически то же самое (с дополнительным использованием теорем о стабилизации стратов мультиособенностей из [2], см. [3], теорему 1 в § 5 гл. IV).

[1] Некрасов Н. А. О когомологиях дополнения к бифуркационной диаграмме функций особенности A_μ. *Функц. анализ и его прилож.*, 1993, **27**(4), 24–31.

[2] Васильев В. А. Стабильные когомологии дополнений к дискриминантам деформаций особенностей гладких функций. В кн.: Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, т. 33. М.: ВИНИТИ, 1988, 3–29.

[3] Васильев В. А. Топология дополнений к дискриминантам. М.: ФАЗИС, 1997.

В. А. Васильев

1975-20

Для кривых ($m = 1$) список состоит из 1) всех отображений с ненулевым квадратичным членом ряда Тейлора в особой точке (одноиндексная бесконечная серия), 2) всех отображений с нулевым квадратичным, но ненулевым кубическим членом ряда Тейлора (две трехиндексные серии), 3) отображений с 6-струей $(t^4, t^6, 0, \ldots, 0)$ (семь одноиндексных серий), 4) тридцати двух «спорадических» кривых, см. [1].

Случай плоских кривых ($m = 1$, $n = 2$) был исследован Брюсом и Гафни в 1982 г. [2].

Сейчас кое-что известно и о симплектическом варианте задачи [3].

[1] Арнольд В. И. Простые особенности кривых. *Труды МИРАН им. В. А. Стеклова*, 1999, **226**, 27–35. [*Английская версия*: Simple singularities of curves. CEREMADE (UMR 7534), Université Paris-Dauphine, № 9906, 09/02/1999.]
[*Интернет*: `http://www.botik.ru/~duzhin/arnold/arn-papers.html`]

[2] Bruce J. W., Gaffney T. J. Simple singularities of mappings $(\mathbb{C}, 0) \to \to (\mathbb{C}^2, 0)$. *J. London Math. Soc., Ser.* 2, 1982, **26**(3), 465–474.

[3] Arnol′d V. I. First steps of local symplectic algebra. CEREMADE (UMR 7534), Université Paris-Dauphine, № 9902, 20/01/1999; In: Differential Topology, Infinite-Dimensional Lie Algebras, and Applications. D. B. Fuchs' 60th Anniversary Collection. Editors: A. Astashkevich and S. Tabachnikov. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999, 1–8. (AMS Translations, Ser. 2, 194; Advances in Math. Sci., 44.)
[*Интернет*: `http://www.botik.ru/~duzhin/arnold/arn-papers.html`]

В. И. Арнольд

1975-21

Задачу можно считать в основном решенной, см. обзор [1] (раздел о «геометрии формул» Хованского).

[1] Arnol′d V. I., Varchenko A. N., Givental′ A. B., Khovanskiĭ A. G. Singularities of functions, wave fronts, caustics and multidimensional integrals. In: Mathematical Physics Reviews, V. 4. Editor: S. P. Novikov. Chur: Harwood Acad. Publ., 1984, 1–92. (Soviet Sci. Rev., Sect. C: Math. Phys. Rev., 4.)

1975-22

Этот вопрос о строении двулистных разветвленных накрытий можно считать в основном решенным (см., например, [1]).

[1] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов. М.: Наука, 1984.

1975-23

Об M-особенностях см. обзор [1]. Я не знаю, решен ли вопрос о существовании M-особенностей в любом классе $\mathbb{C}$-эквивалентности (может быть, он даже решен отрицательно).

Вещественная и комплексная модальности могут различаться для действий алгебраических групп (пример указан Э. Б. Винбергом, см. статью [2]).

Ответ на вопрос о комплексной стратификации, скорее всего, отрицательный, так как некоторые страты комплексной задачи могут вовсе не проявляться в вещественной области (подобно линиям самопересечения «пирамиды» D_4 — впрочем, в этом случае существует вещественная форма «кошелек», где они проявляются).

См. также комментарий к задаче *1979-6*.

[1] Арнольд В. И., Олейник О. А. Топология действительных алгебраических многообразий. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1979, № 6, 7–17.

[2] Arnol′d V. I. On some problems in singularity theory. In: Geometry and Analysis. Papers dedicated to the memory of V. K. Patodi. Bangalore: Indian Acad. Sci., 1980, 1–9. [*Reprinted in*: *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 1981, **90**(1), 1–9.]

В. И. Арнольд

1975-24

Многие результаты в этом направлении изложены в книге [1]. См. также комментарий к задаче *1973-7*.

[1] Васильев В. А. Топология дополнений к дискриминантам. М.: ФАЗИС, 1997, гл. IV.

1975-25

Первая часть задачи в основном решена: см. работы [1–5]. О второй известно мало (ср. работы [6–16]).

См. также комментарий к задаче *1981-14*.

[1] Arnol′d V. I. Wave front evolution and equivariant Morse lemma. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1976, **29**(6), 557–582; correction: 1977, **30**(6), 823. [*Перевод на русский язык в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 289–318.]

[2] Арнольд В. И. Перестройки особенностей потенциальных потоков в бесстолкновительной среде и метаморфозы каустик в трехмерном пространстве. *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, 1982, **8**, 21–57.

[3] Бахтин В. И. Топологические нормальные формы перестроек каустик серии D_μ. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1987, № 4, 58–61.

[4] Arnol′d V. I., Baryshnikov Yu. M., Bogaevskiĭ I. A. Supplement 2 in: Gurbatov S. N., Malakhov A. N., Saichev A. I. Nonlinear Random Waves and Turbulence in Nondispersive Media: Waves, Rays, Particles. Translated from Russian. Manchester: Manchester Univ. Press, 1991. (Nonlinear Science: Theory and Applications.)

[5] Arnol′d V. I. Singularities of Caustics and Wave Fronts. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990. (Math. Appl., Soviet Ser., 62.) [*Русское издание*: Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996.]

[6] Арнольд В. И. Лагранжевы и лежандровы кобордизмы. I и II. *Функц. анализ и его прилож.*, 1980, **14**(3), 1–13; 1980, **14**(4), 8–17.

[7] Арнольд В. И., Зельдович Я. Б., Шандарин С. Ф. Крупномасштабная структура Вселенной. I. Общие свойства. Одномерная и двумерная модели. М.: Ин-т прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР, 1981, препринт № 100. [*Английское издание*: *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 1982, **20**(1–2), 111–130.]

[8] Арнольд В. И., Зельдович Я. Б., Шандарин С. Ф. Элементы крупномасштабной структуры Вселенной. *Успехи матем. наук*, 1981, **36**(3), 244–245.

[9] Арнольд В. И. О ньютоновском потенциале гиперболических слоев. *Труды Тбилисского ун-та, сер. матем., механ., астроном.*, 1982, **232/233**(13–14), 23–29. [*Английское издание*: *Selecta Math. Sov.*, 1985, **4**(2), 103–106.]

[10] Arnol′d V. I. On some nonlinear problems. In: Crafoord Prize in Mathematics, 1982. Crafoord Lectures. Stockholm: The Royal Swedish Academy of Sciences, 1982, 1–7. [*Перевод на русский язык в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 335–344.]

[11] Арнольд В. И. О ньютоновском притяжении скоплений пылевидных частиц. *Успехи матем. наук*, 1982, **37**(4), 125.

[12] Arnol′d V. I. Some algebro-geometrical aspects of the Newton attraction theory. In: Arithmetic and Geometry. Papers dedicated to I. R. Shafarevich. Vol. II: Geometry. Basel: Birkhäuser, 1983, 1–3. (Progr. Math., 36.)

[13] Arnol′d V. I. Mathematical problems in classical physics. In: Trends and Perspectives in Applied Mathematics. Editors: F. John, J. E. Marsden and L. Sirovich. New York: Springer, 1994, 1–20. (Appl. Math. Sci., 100.) [*Перевод на русский язык в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 553–575.]

[14] Ройтварф А. А. О движении сплошной среды в силовом поле с коренной особенностью. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1987, № 1, 65–68.

[15] Roytvarf A. A. On the dynamics of a one-dimensional self-gravitating medium. *Physica D*, 1994, **73**(3), 189–204.

[16] Станченко С. В. Произвольные деформации лагранжевых и лежандровых отображений. *Труды МИРАН им. В. А. Стеклова*, 1995, **209**, 220–233.

В. И. Арнольд

1975-26

Помимо работ, цитированных в комментарии к задаче *1970-1*, отметим работы [1–12], а также статьи [2, 13–15] о вырождении спектральной последовательности для естественной стратификации пространства эрмитовых матриц по кратностям собственных чисел и о кольце форм кривизны.

[1] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 3 (Динамические системы–3). М.: ВИНИТИ, 1985.

[2] Arnol′d V. I. Remarks on eigenvalues and eigenvectors of Hermitian matrices, Berry phase, adiabatic connections and quantum Hall effect. *Selecta Math.* (*N. S.*), 1995, **1**(1), 1–19. [*Перевод на русский язык в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 583–604.]

[3] Арнольд В. И. Родственники фактора комплексной проективной плоскости по комплексному сопряжению. *Труды МИРАН им. В. А. Стеклова*, 1999, **224**, 56–67.
[*Интернет*: `http://www.botik.ru/~duzhin/arnold/arn-papers.html`]

[4] Arnol′d V. I. Symplectization, complexification and mathematical trinities. The second Toronto lecture (1997). *Fields Institute Commun.* (to appear); CEREMADE (UMR 7534), Université Paris-Dauphine, № 9815, 04/03/1998. [*Интернет*: `http://www.botik.ru/~duzhin/arnold/arn-papers.html`]

[5] Майлыбаев А. А., Сейранян А. П. Об особенностях границы области устойчивости. *ДАН*, 1998, **359**(5), 632–636.

[6] Майлыбаев А. А., Сейранян А. П. Особенности границ областей устойчивости. *Прикл. матем. механ.*, 1998, **62**(6), 984–995.

[7] Майлыбаев А. А. О касательных конусах к области устойчивости семейства действительных матриц. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1998, № 6, 51–54.

[8] Сейранян А. П., Майлыбаев А. А. Об особенностях границ областей устойчивости гамильтоновых и гироскопических систем. *ДАН*, 1999, **365**(6), 756–760.

[9] Майлыбаев А. А., Сейранян А. П. Об областях устойчивости гамильтоновых систем. *Прикл. матем. механ.*, 1999, **63**(4), 568–579.

[10] Майлыбаев А. А. Метод приведения семейств матриц к нормальным формам. *ДАН*, 1999, **367**(2), 168–172.

[11] Майлыбаев А. А. Приведение семейств матриц к нормальным формам и приложение к теории устойчивости. *Фундам. и прикл. математика*, 1999, **5**(4) (в печати).

[12] Майлыбаев А. А. Особенности границ областей устойчивости: анализ и приложения. Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 1999.

[13] Shapiro M. Z., Vainshtein A. D. Stratification of Hermitian matrices and the Alexander mapping. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1995, **321**(12), 1599–1604.

[14] Shapiro B. Z., Shapiro M. Z. On ring generated by Chern 2-forms on $\mathrm{SL}_n/\mathcal{B}$. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1998, **326**(1), 75–80.

[15] Postnikov A. E., Shapiro B. Z., Shapiro M. Z. Algebras of curvature forms on homogeneous manifolds. In: Differential Topology, Infinite-Dimensional Lie Algebras, and Applications. D. B. Fuchs' 60th Anniversary Collection. Editors: A. Astashkevich and S. Tabachnikov. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999, 227–235. (AMS Translations, Ser. 2, 194; Advances in Math. Sci., 44.)

В. И. Арнольд

1975-27

Обзор достижений в этой области имеется, например, в работе [1] и в книге [2], а обзор открытых вопросов — в статье [3]. Значительный вклад в исследование асимптотик осциллирующих интегралов внесли А. Н. Варченко и В. Н. Карпушкин. Интегралы метода перевала изучались в работах В. А. Васильева и Ю. М. Барышникова.

[1] Arnol′d V. I., Varchenko A. N., Givental′ A. B., Khovanskiĭ A. G. Singularities of functions, wave fronts, caustics and multidimensional integrals. In: Mathematical Physics Reviews, V. 4. Editor: S. P. Novikov. Chur: Harwood Acad. Publ., 1984, 1–92. (Soviet Sci. Rev., Sect. C: Math. Phys. Rev., 4.)

[2] Arnol′d V. I. Singularities of Caustics and Wave Fronts. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990. (Math. Appl., Soviet Ser., 62.) [*Русское издание*: Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996.]

[3] Arnol′d V. I. Mathematical problems in classical physics. In: Trends and Perspectives in Applied Mathematics. Editors: F. John, J. E. Marsden and L. Sirovich. New York: Springer, 1994, 1–20. (Appl. Math. Sci., 100.) [*Перевод на русский язык в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 553–575.]

В. И. Арнольд

1975-28

Исследованию особенностей огибающих семейств подмногообразий с указанной точки зрения посвящены работы [1–12].

[1] Арнольд В. И. О теории огибающих. *Успехи матем. наук*, 1976, **31**(3), 248–249.

[2] Arnol′d V. I. Wave front evolution and equivariant Morse lemma. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1976, **29**(6), 557–582; correction: 1977, **30**(6), 823. [*Перевод на русский язык в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 289–318.]

[3] Арнольд В. И. Заметание каустики ребром возврата движущегося фронта. *Успехи матем. наук*, 1981, **36**(4), 233.

[4] Арнольд В. И. Лагранжевы многообразия с особенностями, асимптотические лучи и раскрытый ласточкин хвост. *Функц. анализ и его прилож.*, 1981, **15**(4), 1–14.

[5] Арнольд В. И. Асимптотические лучи в симплектической геометрии. *Успехи матем. наук*, 1982, **37**(2), 182–183.

[6] Арнольд В. И. Особенности в вариационном исчислении. В кн: Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики, т. 22. М.: ВИНИТИ, 1983, 3–55.

[7] Арнольд В. И. Особенности систем лучей. *Успехи матем. наук*, 1983, **38**(2), 77–147.

[8] Arnol′d V. I. Singularities of ray systems. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Warsaw, August 16–24, 1983), V. 1. Editors: Z. Ciesielski and C. Olech. Warsaw: PWN *and* Amsterdam: North-Holland, 1984, 27–49.

[9] Арнольд В. И. Неявные дифференциальные уравнения, контактные структуры и релаксационные колебания. *Успехи матем. наук*, 1985, **40**(5), 188.

[10] Арнольд В. И. Контактная структура, релаксационные колебания и особые точки неявных дифференциальных уравнений. В кн.: Геометрия и теория особенностей в нелинейных уравнениях. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987, 3–8. (Новое в глобальном анализе, 7.) [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 391–396.]

[11] Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В. Особенности. II. Классификация и приложения. Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 39 (Динамические системы–8). М.: ВИНИТИ, 1989.

[12] Petris J. E. H. Normalformen für Singularitäten von einparametrigen Flächenscharen. Dissertation, ETH № 9016, Eidgenöss. Techn. Hochsch. Zürich, 1990, 170 S.

В. И. Арнольд

1975-29

Указанные вопросы рассматривались в статьях и книгах [1–21], а также в препринтах А. А. Аграчева и работах А. А. Давыдова.

[1] Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей. В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Под ред. С. В. Успенского. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1976, 5–15. (Труды семинара С. Л. Соболева, 1.)

[2] Арнольд В. И. Лагранжевы и лежандровы кобордизмы. I и II. *Функц. анализ и его прилож.*, 1980, **14**(3), 1–13; 1980, **14**(4), 8–17.

[3] Arnol′d V. I. On some problems in singularity theory. In: Geometry and Analysis. Papers dedicated to the memory of V. K. Patodi. Bangalore: Indian Acad. Sci., 1980, 1–9. [*Reprinted in*: *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 1981, **90**(1), 1–9.]

[4] Арнольд В. И. Заметание каустики ребром возврата движущегося фронта. *Успехи матем. наук*, 1981, **36**(4), 233.

[5] Арнольд В. И. Лагранжевы многообразия с особенностями, асимптотические лучи и раскрытый ласточкин хвост. *Функц. анализ и его прилож.*, 1981, **15**(4), 1–14.

[6] Арнольд В. И. Перестройки особенностей потенциальных потоков в бесстолкновительной среде и метаморфозы каустик в трехмерном пространстве. *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, 1982, **8**, 21–57.

[7] Arnol′d V. I. Singularities of Legendre varieties, of evolvents and of fronts at an obstacle. *Ergod. Theory Dynam. Syst.*, 1982, **2**(3–4), 301–309.

[8] Арнольд В. И. Особенности в вариационном исчислении. В кн: Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики, т. 22. М.: ВИНИТИ, 1983, 3–55.

[9] Арнольд В. И. Особенности систем лучей. *Успехи матем. наук*, 1983, **38**(2), 77–147.

[10] Арнольд В. И. Особенности в вариационном исчислении. *Успехи матем. наук*, 1984, **39**(5), 256.

[11] Arnol′d V. I. Singularities of ray systems. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Warsaw, August 16–24, 1983), V. 1. Editors: Z. Ciesielski and C. Olech. Warsaw: PWN *and* Amsterdam: North-Holland, 1984, 27–49.

[12] Арнольд В. И. Предисловие к кн.: Гриффитс Ф. Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление. Пер. с англ. С. К. Ландо под ред. В. И. Арнольда. М.: Мир, 1986, 5–6.

[13] Арнольд В. И. О поверхностях, определяемых гиперболическими уравнениями. *Матем. заметки*, 1988, **44**(1), 3–18. [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 397–412.]

[14] Arnol′d V. I. On the interior scattering of waves, defined by hyperbolic variational principles. *J. Geom. Phys.*, 1988, **5**(3), 305–315.

[15] Arnol′d V. I. Singularities of Caustics and Wave Fronts. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990. (Math. Appl., Soviet Ser., 62.) [*Русское издание*: Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996.]

[16] Arnol′d V. I., Baryshnikov Yu. M., Bogaevskiĭ I. A. Supplement 2 in: Gurbatov S. N., Malakhov A. N., Saichev A. I. Nonlinear Random Waves and Turbulence in Nondispersive Media: Waves, Rays, Particles. Translated from Russian. Manchester: Manchester Univ. Press, 1991. (Nonlinear Science: Theory and Applications.)

[17] Arnol′d V. I. Sur les propriétés topologiques des projections lagrangiennes en géométrie symplectique des caustiques. CEREMADE (UMR 7534), Université Paris-Dauphine, № 9320, 14/06/1993; *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid*, 1995, **8**(1), 109–119. [*Перевод на русский язык в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 525–532.]

[18] Арнольд В. И. О топологических свойствах лежандровых проекций в контактной геометрии волновых фронтов. *Алгебра и анализ*, 1994, **6**(3), 1–16.

[19] Arnol′d V. I. Topological Invariants of Plane Curves and Caustics. Dean Jacqueline B. Lewis Memorial Lectures, Rutgers University. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994. (University Lecture Series, 5.)

[20] Арнольд В. И. Инварианты и перестройки фронтов на плоскости. *Труды МИРАН им. В. А. Стеклова*, 1995, **209**, 14–64.

[21] Арнольд В. И. Топологические проблемы теории распространения волн. *Успехи матем. наук*, 1996, **51**(1), 3–50.

В. И. Арнольд

1975-30

Задача была впервые поставлена шведским королем Оскаром II еще в 1884 г. в качестве одного из 4 вопросов на премию (см. [1]). Для обыкновенных дифференциальных уравнений она была в основном решена спустя 100 лет А. А. Давыдовым [2] после предварительных работ Р. Тома [3] и Л. Дара [4], см. также статьи [1, 5–9] и книги [10–12]. О случае уравнений с частными производными известно мало. Частичные результаты получены В. В. Лычагиным и М. Я. Житомирским.

[1] Arnol′d V. I. Contact geometry: the geometrical method of Gibbs's thermodynamics. In: Proceedings of the Gibbs Symposium (Yale Univ., May 15–17, 1989). Editors: D. G. Caldi and G. D. Mostow. Providence, RI: Amer. Math. Soc. *and* New York: American Institute of Physics, 1990, 163–179.

[2] Давыдов А. А. Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности его особой точки. *Функц. анализ и его прилож.*, 1985, **19**(2), 1–10.

[3] Thom R. Sur les équations différentielles multiformes et leurs intégrales singulières. *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 1972, **3**(1), 1–11.

[4] Dara L. Singularités génériques des équations différentielles multiformes. *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 1975, **6**(2), 95–128.

[5] Арнольд В. И. Неявные дифференциальные уравнения, контактные структуры и релаксационные колебания. *Успехи матем. наук*, 1985, **40**(5), 188.

[6] Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П. Теория бифуркаций. В кн.: Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 5 (Динамические системы–5). М.: ВИНИТИ, 1986, 5–218.

[7] Арнольд В. И. Теория катастроф. В кн.: Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 5 (Динамические системы–5). М.: ВИНИТИ, 1986, 219–277.

[8] Арнольд В. И. Контактная структура, релаксационные колебания и особые точки неявных дифференциальных уравнений. В кн.: Геометрия и теория особенностей в нелинейных уравнениях. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987, 3–8. (Новое в глобальном анализе, 7.) [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 391–396.]

[9] Arnol′d V. I. Bifurcations and singularities in mathematics and mechanics. In: Theoretical and Applied Mechanics (XVII IUTAM Congress, Grenoble, August 21–27, 1988). Editors: P. Germain, M. Piau and D. Caillerie. Amsterdam: North-Holland, 1989, 1–25.

[10] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[11] Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В. Особенности. II. Классификация и приложения. Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 39 (Динамические системы–8). М.: ВИНИТИ, 1989.

[12] Арнольд В. И. Лекции об уравнениях с частными производными. Изд. 2-е, дополн. М.: ФАЗИС, 1997.

В. И. Арнольд

1976

1976-7

В настоящее время в локальных задачах на плоскости в C^r-орбитальной эквивалентности достигнут заметный прогресс.

В работе [1] указаны необходимые и достаточные условия теоремы конечности в окрестности конечно-вырожденной особой точки векторного поля на плоскости (см. комментарий к задаче *1976-11*). Используется понятие *конечно-гладкой эквивалентности* векторных полей на плоскости. Точнее, два векторных поля C^r-орбитально эквивалентны между собой в том и только в том случае, когда найдется диффеоморфизм класса C^r $(r \geqslant 2)$, переводящий фазовый портрет одного векторного поля в фазовый портрет другого (с сохранением направления движения по фазовым кривым).

В заметке [2] введено понятие *орбитальной связности*, позволяющее в ряде случаев получать теоремы конечности в бесконечно-гладкой категории.

В настоящее время вычисление конечно-модальных нормальных форм и построение соответствующих версальных деформаций выполнены Н. А. Раутиан для эквивариантных векторных полей в случае резонанса 1 : 3 (см. [3–4]; постановку задачи см. в [5]).

[1] Богданов Р. И. Мультипликативная теория орбитальной эквивалентности векторных полей на плоскости. *Труды МИРАН им. В. А. Стеклова*, 1998, **221**, 101–126.

[2] Богданов Р. И. Орбитальная связность и версальные семейства векторных полей на плоскости. *Функц. анализ и его прилож.* (в печати).

[3] Раутиан Н. А. Полиномиальные нормальные формы q-эквивариантных векторных полей на плоскости при $q = 3$. *Успехи матем. наук*, 1998, **53**(4), 207.

[4] Rautian N. A. Polynomial versal deformations of equivariant vector fields with the resonance of order 3. В кн.: Международная конференция, посвященная 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина. Тезисы докладов. Дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1998, 89–90.

[5] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

Р. И. Богданов

1976-8

Это задача из статьи [1] (с. 5: задача 3), см. также английский перевод [2].

[1] Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей. В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Под ред. С. В. Успенского. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1976, 5–15. (Труды семинара С. Л. Соболева, 1.)

[2] Arnol′d V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

1976-10

Это задача из статьи [1] (§ 3).

[1] Арнольд В. И. Некоторые задачи теории дифференциальных уравнений. В кн.: Нерешенные задачи механики и прикладной математики. М.: Изд-во МГУ, 1977, 3–9.

* * *

1976-10

В задаче предлагается рассматривать системы с вращающимися фазами (см. комментарий к задачс *1972-9*). Спрашивается, какова мера множества начальных данных, для которых погрешность описания эволюции медленных переменных с помощью метода усреднения превосходит заданную величину. Полученные результаты описаны в комментарии к задаче *1972-10*.

А. И. Нейштадт

1976-11

А. Локальные гомологии. Излагаемая ниже конструкция является гипотезой, решающей поставленную задачу. Приведенный ниже комплекс использовался автором настоящего комментария в [1] для построения нормальных форм особых точек векторных полей, возникающих при «раздутии» сложных особых точек с помощью σ-процесса (см. [2–3]), а также для исследования бифуркационных поверхностей в гипотетически версальных семействах векторных полей коразмерности три на плоскости (результаты без доказательства приведены в [4]). В [1] описана техника преобразования Фурье, упрощающая вычисления комплексного анализа.

Через Λ_m (соответственно Λ_m^*), $m = 0, 1, 2$, обозначим пространство m-векторных полей класса C^∞ на плоскости, быстро убывающих на бесконечности (соответственно пространство, двойственное к Λ_m, т. е. образованное внешними m-формами на плоскости с коэффициентами из алгебры медленно растущих распределений на плоскости).

Пусть $\boldsymbol{v}$ — финитное поле на плоскости класса C^∞. Через $\alpha_{\boldsymbol{v}}$ (соответственно $i_{\boldsymbol{v}}$) обозначим оператор внешнего умножения на векторное поле $\boldsymbol{v}$ (соответственно оператор свертки с векторным полем $\boldsymbol{v}$, т. е. оператор внутреннего умножения, двойственный к оператору $\alpha_{\boldsymbol{v}}$). Таким образом, получаем сопряженные цепные комплексы:

$$\alpha_{\boldsymbol{v}}\colon\ 0 \longrightarrow \Lambda_0 \longrightarrow \Lambda_1 \longrightarrow \Lambda_2 \longrightarrow 0, \qquad (1)$$

$$i_{\boldsymbol{v}}\colon\ 0 \longleftarrow \Lambda_0^* \longleftarrow \Lambda_1^* \longleftarrow \Lambda_2^* \longleftarrow 0. \qquad (2)$$

Лемма 1. *Гомологии комплекса* (1) *в члене* Λ_2 (*соответственно комплекса* (2) *в члене* Λ_0^*) *отвечают за кратность особой точки векторного поля* $\boldsymbol{v}$ *при подходящей локализации.*

Следствие 2. *В общем случае* (*точнее, вне подмножества коразмерности* ∞ *в пространстве гладких векторных полей*) *гомологии, указанные в лемме* 1, *конечномерны над* $\mathbb{R}$.

Через $L_{\boldsymbol{v}}$ обозначим оператор производной Ли вдоль векторного поля $\boldsymbol{v}$ (оператор $L_{\boldsymbol{v}}$ самосопряжен).

Рассмотрим короткие цепные комплексы (с дифференциалами $d = \alpha_{\boldsymbol{v}}$ или $d = i_{\boldsymbol{v}}$) с морфизмом, задаваемым оператором $L_{\boldsymbol{v}}$:

$$\begin{tikzcd}
\alpha_{\boldsymbol{v}}\colon\ 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda_1 \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda_2 \arrow[r] \arrow[d, "L_{\boldsymbol{v}}"] & 0 \\
\alpha_{\boldsymbol{v}}\colon\ 0 \arrow[r] & \Lambda_0 \arrow[r] & \Lambda_1 \arrow[r] & \Lambda_2 \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd} \qquad (3)$$

$$\begin{tikzcd}
i_{\boldsymbol{v}}\colon\ 0 & \Lambda_0^* \arrow[l] \arrow[d] & \Lambda_1^* \arrow[l] \arrow[d] & \Lambda_2^* \arrow[l] \arrow[d, "L_{\boldsymbol{v}}"] & 0 \arrow[l] \\
i_{\boldsymbol{v}}\colon\ 0 & \Lambda_0^* \arrow[l] & \Lambda_1^* \arrow[l] & \Lambda_2^* \arrow[l] & 0. \arrow[l]
\end{tikzcd} \qquad (4)$$

Комплексам (3) и (4) отвечают диагональные комплексы (двойственные между собой).

Лемма 3. *Гомологии комплекса* (3) *в члене* Λ_2 (*соответственно комплекса* (4) *в члене* Λ_0^*) *бесконечномерны над* $\mathbb{R}$ *при локализации в окрестности конечнократной особой точки векторного поля* $\boldsymbol{v}$, *начиная с вырождений коразмерности два* (описание случаев конечномерных над $\mathbb{R}$ гомологий см. ниже в п. Б).

Гипотеза. *Гомологии комплекса* (4) *в члене* Λ_0^* *содержат образующие, отвечающие исчезающим циклам возмущений векторного поля* $\boldsymbol{v}$.

Замечание. В заметке [5] объясняется, как с помощью понятия орбитальной связности находить конечномерные над $\mathbb{R}$ векторные пространства, отвечающие гомологиям фазового портрета векторного поля в окрестности конечновырожденной особой точки. В частности, исчезающим циклам отвечают положительно определенные образующие в этом пространстве.

Б. Элементарные особые точки. Остановимся подробнее на особенностях, для которых ряд Пуанкаре сводится к многочлену. Точнее, опишем конечно-модальные особенности.

Лемма 1. *Особые точки на плоскости, в которых матрица линеаризации не является нильпотентной, за исключением случаев коразмерности* ∞ *в пространстве всех векторных полей являются конечно-модальными* (*точнее, унимодальными*) *относительно* C^∞*-орбитальной эквивалентности.*

Следствие 2. *Ряд Пуанкаре указанных в лемме* 1 *особых точек есть многочлен* (*который является малочленом*).

Определение. В [6] особые точки векторных полей, для которых ряд Пуанкаре является многочленом, названы *элементарными*. Это название объясняет следующая лемма.

Лемма 3 (см. [6]). *Элементарные* (*синоним*: *конечно-модальные*) *особые точки векторных полей на плоскости интегрируются в элементарных функциях математического анализа в подходящей гладкой системе координат.*

Лемма 4 (см. [7]). *Элементарные особые точки из леммы 3, перечисленные с подходящим увеличением классифицирующих списков, решают задачу перечисления конечно-модальных особенностей относительно орбитальной эквивалентности с использованием симплектических замен фазовых координат на плоскости. Более того, имеет место свойство интегрируемости в элементарных функциях подходящих симплектических координат на фазовой плоскости.*

Безусловно, свойство интегрируемости в элементарных функциях должно быть, в силу алгебраических причин, связанным с «хорошими» свойствами подходящих групп Галуа (см. [8]). Естественно, что вместо групп Галуа легче изучать соответствующие алгебры Галуа.

Определение. *Алгеброй (Ли) Галуа* векторного поля на плоскости называется стационарная подалгебра фазового портрета данного векторного поля в алгебре Ли всех гладких векторных полей на плоскости.

Алгебры Галуа векторных полей на плоскости в окрестности элементарных особых точек описаны в [9–10].

[1] Bogdanov R. I. Singularities of vector fields on the plane with pointed direction. *Invent. Math.*, 1979, **54**(3), 247–259.

[2] Богданов Р. И. Степень вырождения особой точки векторного поля на плоскости. *Функц. анализ и его прилож.*, 1978, **12**(3), 70–71.

[3] Богданов Р. И. Версальные деформации особых точек векторных полей на плоскости. *Функц. анализ и его прилож.*, 1979, **13**(1), 63–64.

[4] Базыкин А. Д., Кузнецов Ю. А., Хибник А. И. Портреты бифуркаций. Бифуркационные диаграммы динамических систем на плоскости. М: Знание, 1989. (Новое в жизни, науке, технике. Сер. «Математика, кибернетика», 89-3.)

[5] Богданов Р. И. Орбитальная связность и версальные семейства векторных полей на плоскости. *Функц. анализ и его прилож.* (в печати).

[6] Богданов Р. И. Инварианты элементарных особых точек на плоскости. *Успехи матем. наук*, 1985, **40**(3), 199–200.

[7] Богданов Р. И. Симплектическая орбитальная эквивалентность векторных полей на плоскости (элементарные особые точки). В кн.: Математика и моделирование. Пущино: ОНТИ НЦБИ, 1990, 32 45.

[8] Шафаревич И. Р. Основные понятия алгебры. Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 11 (Алгебра–1). М.: ВИНИТИ, 1986.

[9] Богданов Р. И. Интегралы почти интегрируемых наборов векторных полей на плоскости. *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, 1992, **16**, 70–105.

[10] Богданов Р. И. Локальные относительные интегральные инварианты, связанные с фазовым портретом векторного поля на плоскости. *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, 1994, **17**, 249–265.

Р. И. Богданов

1976-12

С современным состоянием теории малочленов можно ознакомиться по книге [1].

[1] Хованский А. Г. Малочлены. М.: ФАЗИС, 1997.

1976-13

Это задача из статьи [1] (с. 5: задача 1), см. также английский перевод [2].

[1] Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей. В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Под ред. С. В. Успенского. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1976, 5–15. (Труды семинара С. Л. Соболева, 1.)

[2] Arnol′d V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

См. комментарий к задаче *1973-7*.

1976-14

Это задача из статьи [1] (с. 5: задача 2), см. также английский перевод [2].

[1] Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей. В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Под ред. С. В. Успенского. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1976, 5–15. (Труды семинара С. Л. Соболева, 1.)

[2] Arnol′d V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

См. комментарий к задаче *1979-6*.

1976-15

Это задача из статьи [1] (с. 5–6: задача 4), см. также английский перевод [2].

[1] Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей. В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Под ред. С. В. Успенского. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1976, 5–15. (Труды семинара С. Л. Соболева, 1.)

[2] Arnol′d V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

См. комментарий к задаче *1973-11*.

1976-16

Это задача из статьи [1] (с. 6: задача 5). Английский перевод [2] этой статьи содержит комментарии В. И. Арнольда от 5 октября 1981 г. и 3 марта 1982 г.

[1] Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей. В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Под ред. С. В. Успенского. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1976, 5–15. (Труды семинара С. Л. Соболева, 1.)

[2] Arnol′d V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

1976-17

Это задача из статьи [1] (с. 6: задача 6). Английский перевод [2] этой статьи содержит комментарий В. И. Арнольда от 5 октября 1981 г.

[1] Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей. В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Под ред. С. В. Успенского. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1976, 5–15. (Труды семинара С. Л. Соболева, 1.)

[2] Arnol′d V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

1976-18

Это задача из статьи [1] (с. 6: задача 7). Английский перевод [2] этой статьи содержит комментарий В. И. Арнольда от 5 октября 1981 г.

[1] Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей. В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Под ред. С. В. Успенского. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1976, 5–15. (Труды семинара С. Л. Соболева, 1.)

[2] Arnol′d V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

1976-19

Это задача из статьи [1] (с. 6: задача 8). Английский перевод [2] этой статьи содержит комментарий В. И. Арнольда от 5 октября 1981 г.

[1] Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей. В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Под ред. С. В. Успенского. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1976, 5–15. (Труды семинара С. Л. Соболева, 1.)

[2] Arnol′d V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

1976-20

Это задача из статьи [1] (с. 7: задача 9). Английский перевод [2] этой статьи содержит комментарий В. И. Арнольда от 5 октября 1981 г.

[1] Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей. В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Под ред. С. В. Успенского. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1976, 5–15. (Труды семинара С. Л. Соболева, 1.)

[2] Arnol'd V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

1976-21

Это задача из статьи [1] (с. 7: задача 10), см. также английский перевод [2].

[1] Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей. В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Под ред. С. В. Успенского. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1976, 5–15. (Труды семинара С. Л. Соболева, 1.)

[2] Arnol'd V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

1976-22

Это задача из статьи [1] (с. 7–8: задача 11). Английский перевод [2] этой статьи содержит комментарий В. И. Арнольда от 5 октября 1981 г. Задача вычисления показателей $\beta(l)$ приведена в статье [3] (XVI(E), p. 58).

[1] Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей. В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Под ред. С. В. Успенского. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1976, 5–15. (Труды семинара С. Л. Соболева, 1.)

[2] Arnol′d V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

[3] Problems of present day mathematics. Editor: F. E. Browder. In: Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems (Northern Illinois University, 1974). Part 1. Editor: F. E. Browder. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1976, 35–79. (Proc. Symposia Pure Math., 28.)

1976-23

Это задача из статьи [1] (с. 8–9: задача 12). Английский перевод [2] этой статьи содержит комментарий В. И. Арнольда от 5 октября 1981 г.

[1] Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей. В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Под ред. С. В. Успенского. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1976, 5–15. (Труды семинара С. Л. Соболева, 1.)

[2] Arnol′d V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

1976-24

Это задача из статей [1] (с. 9–10: задача 13) и [2] (VIII, p. 46). Английский перевод [3] первой статьи содержит комментарий В. И. Арнольда от 5 октября 1981 г.

[1] Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей. В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Под ред. С. В. Успенского. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1976, 5–15. (Труды семинара С. Л. Соболева, 1.)

[2] Problems of present day mathematics. Editor: F. E. Browder. In: Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems (Northern Illinois University, 1974). Part 1. Editor: F. E. Browder. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1976, 35–79. (Proc. Symposia Pure Math., 28.)

[3] Arnol′d V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

1976-25

Это задача из статьи [1] (с. 10: задача 14). Английский перевод [2] этой статьи содержит комментарий В. И. Арнольда от 5 октября 1981 г. Более общая формулировка задачи приведена в статье [3] (XVI(F), p. 58–59).

[1] Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей. В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Под ред. С. В. Успенского. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1976, 5–15. (Труды семинара С. Л. Соболева, 1.)

[2] Arnol′d V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

[3] Problems of present day mathematics. Editor: F. E. Browder. In: Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems (Northern Illinois University, 1974). Part 1. Editor: F. E. Browder. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1976, 35–79. (Proc. Symposia Pure Math., 28.)

1976-26

Это задача из статьи [1] (с. 10: задача 15). Английский перевод [2] этой статьи содержит комментарий В. И. Арнольда от 5 октября 1981 г.

[1] Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей. В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Под ред. С. В. Успенского. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1976, 5–15. (Труды семинара С. Л. Соболева, 1.)

[2] Arnol′d V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

1976-27

Это задача из статьи [1] (с. 10–11: задача 16). Английский перевод [2] этой статьи содержит комментарий В. И. Арнольда от 5 октября 1981 г.

[1] Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей. В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Под ред. С. В. Успенского. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1976, 5–15. (Труды семинара С. Л. Соболева, 1.)

[2] Arnol'd V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

1976-28

Это задача из статьи [1] (с. 11–12: задача 17). Английский перевод [2] этой статьи содержит комментарий В. И. Арнольда от 5 октября 1981 г.

[1] Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей. В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Под ред. С. В. Успенского. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1976, 5–15. (Труды семинара С. Л. Соболева, 1.)

[2] Arnol'd V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

1976-29

Это задача из статей [1] (с. 12: задача 18а), [2] (XVII(C), p. 59–60) и [3] (§ 4). Английский перевод [4] первой статьи содержит комментарий В. И. Арнольда от 5 октября 1981 г.

[1] Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей. В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Под ред. С. В. Успенского. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1976, 5–15. (Труды семинара С. Л. Соболева, 1.)

[2] Problems of present day mathematics. Editor: F. E. Browder. In: Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems (Northern Illinois University, 1974). Part 1. Editor: F. E. Browder. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1976, 35–79. (Proc. Symposia Pure Math., 28.)

[3] Арнольд В. И. Некоторые задачи теории дифференциальных уравнений. В кн.: Нерешенные задачи механики и прикладной математики. М.: Изд-во МГУ, 1977, 3–9.

[4] Arnol′d V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

См. комментарий к задаче *1971-4*.

1976-30

Это задача из статьи [1] (с. 12: задача 18б), см. также английский перевод [2].

[1] Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей. В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Под ред. С. В. Успенского. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1976, 5–15. (Труды семинара С. Л. Соболева, 1.)

[2] Arnol′d V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

1976-31

Это задача из статей [1] (с. 12: задача 19), [2] (XVII(B), p. 59) и [3] (§ 4). Английский перевод [4] первой статьи содержит комментарий В. И. Арнольда от 5 октября 1981 г.

[1] Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей. В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Под ред. С. В. Успенского. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1976, 5–15. (Труды семинара С. Л. Соболева, 1.)

[2] Problems of present day mathematics. Editor: F. E. Browder. In: Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems (Northern Illinois University, 1974). Part 1. Editor: F. E. Browder. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1976, 35–79. (Proc. Symposia Pure Math., 28.)

[3] Арнольд В. И. Некоторые задачи теории дифференциальных уравнений. В кн.: Нерешенные задачи механики и прикладной математики. М.: Изд-во МГУ, 1977, 3–9.

[4] Arnol'd V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

См. комментарий к задаче *1973-4*.

1976-32

Это задача из статьи [1] (с. 12–13: задача 20). Английский перевод [2] этой статьи содержит комментарии В. И. Арнольда от 5 октября 1981 г. и 3 марта 1982 г.

[1] Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей. В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Под ред. С. В. Успенского. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1976, 5–15. (Труды семинара С. Л. Соболева, 1.)

[2] Arnol'd V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

См. комментарии к задачам *1972-12* и *1981-28*.

1976-33

Это задача из статьи [1] (с. 13–14: задача 21), см. также английский перевод [2].

[1] Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей. В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Под ред. С. В. Успенского. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1976, 5–15. (Труды семинара С. Л. Соболева, 1.)

[2] Arnol'd V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

1976-34

Это задача из статьи [1] (VII, p. 45–46). Задача поставлена совместно с G. Shimura.

[1] Problems of present day mathematics. Editor: F. E. Browder. In: Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems (Northern Illinois University, 1974). Part 1. Editor: F. E. Browder. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1976, 35–79. (Proc. Symposia Pure Math., 28.)

1976-35

Это задача из статьи [1] (XIII, p. 50).

[1] Problems of present day mathematics. Editor: F. E. Browder. In: Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems (Northern Illinois University, 1974). Part 1. Editor: F. E. Browder. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1976, 35–79. (Proc. Symposia Pure Math., 28.)

1976-36

Это задача из статьи [1] (XIII, p. 50).

[1] Problems of present day mathematics. Editor: F. E. Browder. In: Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems (Northern Illinois University, 1974). Part 1. Editor: F. E. Browder. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1976, 35–79. (Proc. Symposia Pure Math., 28.)

1976-37

Это задача из статей [1] (XIII, p. 51) и [2] (§ 5).

[1] Problems of present day mathematics. Editor: F. E. Browder. In: Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems (Northern Illinois University, 1974). Part 1. Editor: F. E. Browder. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1976, 35–79. (Proc. Symposia Pure Math., 28.)

[2] Арнольд В. И. Некоторые задачи теории дифференциальных уравнений. В кн.: Нерешенные задачи механики и прикладной математики. М.: Изд-во МГУ, 1977, 3–9.

1976-38

Это задача из статьи [1] (XVI(D), p. 58).

[1] Problems of present day mathematics. Editor: F. E. Browder. In: Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems (Northern Illinois University, 1974). Part 1. Editor: F. E. Browder. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1976, 35–79. (Proc. Symposia Pure Math., 28.)

1976-39

Это задача из статей [1] (XX, p. 66) и [2] (§ 6).

[1] Problems of present day mathematics. Editor: F. E. Browder. In: Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems (Northern Illinois University, 1974). Part 1. Editor: F. E. Browder. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1976, 35–79. (Proc. Symposia Pure Math., 28.)

[2] Арнольд В. И. Некоторые задачи теории дифференциальных уравнений. В кн.: Нерешенные задачи механики и прикладной математики. М.: Изд-во МГУ, 1977, 3–9.

См. комментарий к задаче *1983-3*.

1976-40

Это задача из статьи [1] (XXI(E), p. 67–68).

[1] Problems of present day mathematics. Editor: F. E. Browder. In: Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems (Northern Illinois University, 1974). Part 1. Editor: F. E. Browder. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1976, 35–79. (Proc. Symposia Pure Math., 28.)

1976-41

Это задача из статьи [1] (§ 1).

[1] Арнольд В. И. Некоторые задачи теории дифференциальных уравнений. В кн.: Нерешенные задачи механики и прикладной математики. М.: Изд-во МГУ, 1977, 3–9.

1976-42

Это задача из статьи [1] (§ 2).

[1] Арнольд В. И. Некоторые задачи теории дифференциальных уравнений. В кн.: Нерешенные задачи механики и прикладной математики. М.: Изд-во МГУ, 1977, 3–9.

1977

1977-9

Набор весов $\{A_s, D_j\}$, $1 \leqslant s \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, *невырожден*, если существует квазиоднородное отображение $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ с $\mu(f) < \infty$, весами A_s в прообразе и весами D_j в образе. Здесь $\mu = \dim_{\mathbb{C}} M/I$ — размерность базы версальной деформации: M — свободный модуль вектор-столбцов $\alpha = \sum_j \alpha_j \frac{\partial}{\partial y_j}$, $M \approx A^n$, $A = \mathbb{C}[\![x_1, \ldots, x_s, \ldots, x_m]\!]$, $I \subset M$ — подмодуль, порожденный $f_i\, \partial/\partial y_j$ и $\partial f/\partial x_s$. Я не знаю, будет ли $\mu < \infty$ одинаковым для всех f с $\mu < \infty$ для $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$, но для $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ существует контрпример ($A_1 = A_2 = 1$, $D_1 = 2$, $D_2 = 3$: $\mu(x^2, y^3) = 7$, $\mu(xy, x^3 + y^3) = 6$). Поэтому отображение f_0 называется *вполне невырожденным*, если $\mu(f_0) = \min$ по всем f с данными весами $\{A_s, D_j\}$. Гипотетически этот минимум для $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ равен

$$\mu_{\text{alg}} := 1 - \frac{\prod D}{\prod A}\left(\sum A - \sum D\right) \qquad \left(\text{для } \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 - \frac{\prod D}{\prod A}\right).$$

Для $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ есть контрпример к равенству $\mu_{\min}(A, D) = \mu_{\text{alg}}(A, D)$:

$$\begin{aligned} &A_1 = 5, \quad A_2 = 2, \qquad f_1 = xy^2, \\ &D_1 = 9, \quad D_2 = 10, \quad f_2 = x^2 + y^5, \end{aligned}$$

$\mu_{\min} = 10$, $\mu_{\text{alg}} = \frac{\prod D}{\prod A} = 9$.

Гипотетически $\mu_{\min} \geqslant \mu_{\text{alg}}$ и при всех $m \geqslant n$.

В. И. Арнольд (1977)

1977-12

В этой задаче новые результаты получены аспиранткой механико-математического факультета МГУ Н. А. Раутиан (см. [1]). К нормальной форме при $\varepsilon = 0$ примыкает серия особенностей эквивариантных векторных полей, отвечающих резонансу 1 : 3, более высокой коразмерности вырождения. Для них можно вычислить конечно-модальные нормальные формы и построить соответственно конечнопараметрические версальные семейства. Эти результаты представлены в [2]. В настоящее время неизвестно, насколько увеличивается число модулей при переходе от топологической классификации (использованной при получении версального семейства, указанного в задаче) к бесконечно-гладкой, используемой Н. А. Раутиан. Во всяком случае, версальные семейства Раутиан могут содержать конечное число «лишних модулей» по отношению к топологической эквивалентности, зато факт их версальности доказывается регулярными методами (с помощью понятия орбитальной связности, см. [3]) без трудной теоремы о грубости бифуркаций в главном семействе.

Отметим здесь же, что понятие орбитальной (класса C^∞) эквивалентности векторных полей в примере задачи приводит к функциональным модулям в точечной ($\varepsilon = 0$) нормальной формс.

[1] Раутиан Н. А. Полиномиальные нормальные формы q-эквивариантных векторных полей на плоскости при $q = 3$. *Успехи матем. наук*, 1998, **53**(4), 207.

[2] Rautian N. A. Polynomial versal deformations of equivariant vector fields with the resonance of order 3. В кн.: Международная конференция, посвященная 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина. Тезисы докладов. Дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1998, 89–90.

[3] Богданов Р. И. Орбитальная связность и версальные семейства векторных полей на плоскости. *Функц. анализ и его прилож.* (в печати).

Р. И. Богданов

* * *

1977-12

Рассматриваемое уравнение получается нормировками из укороченной нормальной формы для задачи о потере устойчивости периодическим решением $x = x(t)$ некоторой системы в случае, когда пара комплексно-сопряженных мультипликаторов этого решения проходит через единичную окружность вблизи точек $\pm i$ (т. е. имеется приблизительный резонанс 1 : 4 между периодом решения x и периодом колебаний решений уравнений в вариациях вдоль x). Комплексная переменная z характеризует в этом случае отклонение от периодического решения, а комплексный параметр ε — отклонение мультипликатора от точки i (при $\varepsilon \neq 0$ нормировкой можно добиться $|\varepsilon| = 1$). После [1–2] задача изучалась, в частности, в работах [3–10], сводка полученных результатов имеется в [10–11].

Численное исследование показало, что плоскость комплексного параметра A разбивается кусочно-гладкими кривыми на 48 областей, каждой из которых соответствует одна последовательность бифуркаций фазового портрета уравнения, осуществляющихся при прохождении параметра ε через единичную окружность (существенно разных областей 12, остальные получаются симметриями). Многие из этих разделяющих кривых и бифуркаций найдены аналитически, но полная аналитическая теория отсутствует. Одна из нерешенных задач — изучение бифуркаций при значениях параметра A, близких к i (в точке i сходится несколько бифуркационных кривых).

[1] Арнольд В. И. Потеря устойчивости автоколебаний вблизи резонанса и версальные деформации эквивариантных векторных полей. *Функц. анализ и его прилож.*, 1977, **11**(2), 1–10.

[2] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, § 35.

[3] Нейштадт А. И. Бифуркации фазового портрета одной системы уравнений, возникающей в задаче о потере устойчивости автоколебаний вблизи резонанса 1 : 4. *Прикл. матем. механ.*, 1978, **42**(5), 830–840.

[4] Wan Y.-H. Bifurcation into invariant tori at points of resonance. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1978, **68**(4), 343–357.

[5] Березовская Ф. С., Хибник А. И. К задаче о бифуркациях автоколебаний вблизи резонанса 1 : 4. Препринт НИВЦ АН СССР, Пущино, 1979, 24 с.

[6] Березовская Ф. С., Хибник А. И. О бифуркациях сепаратрис в задаче о потере устойчивости автоколебаний вблизи резонанса 1 : 4. *Прикл. матем. механ.*, 1980, **44**(5), 938–943.

[7] Wang D. Hopf bifurcation at the nonzero foci in 1 : 4 resonance. *Acta Math. Sinica* (*N. S.*), 1990, **6**(1), 10–17.

[8] Cheng Ch.-Q. Hopf bifurcations in nonautonomous systems at points of resonance. *Science in China, Ser. A*, 1990, **33**(2), 206–219.

[9] Cheng Ch.-Q., Sun Y.-S. Metamorphoses of phase portraits of vector field in the case of symmetry of order 4. *J. Differ. Equations*, 1992, **95**(1), 130–139.

[10] Krauskopf B. Bifurcation sequences at 1 : 4 resonance: an inventory. *Nonlinearity*, 1994, **7**(3), 1073–1091.

[11] Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П. Теория бифуркаций. В кн.: Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 5 (Динамические системы–5). М.: ВИНИТИ, 1986, 5–218 (см. гл. 2, § 4).

А. И. Нейштадт

1978

1978-1

См. комментарий к задаче *1972-3*.

1978-3

Для типичных интегрируемых гамильтоновых систем с не более чем тремя степенями свободы показатели крутизны вычислила Е. Е. Ландис (см. [1]). В [1] используются следующие определения локальных показателей крутизны.

Определение 1. Число $k(f)$ называется *показателем крутизны* функции $f\colon (\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R},0)$, если существуют такие константы $C>0$ и $\delta>0$, что для всех ε, $0<\varepsilon<\delta$, в шаре $\{|\mathbf{x}|<\varepsilon\}$ найдется такая сфера $S_\rho^{n-1}:=\{|\mathbf{x}|=\rho<\varepsilon\}$, что $|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})|>C\varepsilon^{k(f)}$ при всех $\mathbf{x}\in S_\rho^{n-1}$.

Определение 2. Число $K(F)$ называется *равномерным показателем крутизны* семейства $F(\mathbf{x},\lambda)$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\in U\subset\mathbb{R}^m$, если для всех $\lambda\in U$ число $K(F)$ является показателем крутизны функции $F(\cdot,\lambda)$ с одними и теми же C и δ.

Теорема [1]. *Пусть начало координат — простая критическая точка функции* $f(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, 0)$. *Тогда минимально возможные показатели* $k(f)$ *и* $K(F)$ *при достаточно малых* λ *даются следующей таблицей (в этой таблице* f_0 *— нормальная форма, которой стабильно эквивалентна функция* f*):*

тип f	A_μ	D_μ	E_6	E_7	E_8
f_0	$x^{\mu+1}$	$x^{\mu-1} + xy^2$	$x^3 + y^4$	$x^3 + xy^3$	$x^3 + y^5$
$k(f)$	μ	$\mu - 2$	3	3,5	4
$K(F)$	μ	$\mu - 1$	?	?	?

Гипотеза [1]. *Для* E_μ *вместо знаков вопроса нужно поставить* $\mu - 2$ $(\mu = 6,\ 7,\ 8)$.

Краткий обзор теории Нехорошева дан в комментарии к задаче *1966-2*.

[1] Ландис Е. Е. Равномерные показатели крутизны. *Успехи матем. наук*, 1986, **41**(4), 179.

М. Б. Севрюк

1978-7

Постановка задачи, по-видимому, следующая. Рассмотрим гладкую (C^∞) гамильтонову систему с $n \geqslant 2$ степенями свободы и положением равновесия 0. Пусть все собственные числа линеаризованной около 0 системы различны (в частности, отличны от нуля) и чисто мнимы. Тогда для любого $N \geqslant 2$ гамильтониан в окрестности 0 с точностью до постоянного слагаемого представим в виде

$$H = \tfrac{1}{2}\omega_1(p_1^2 + q_1^2) + \dots + \tfrac{1}{2}\omega_n(p_n^2 + q_n^2) + H_3 + H_4 + \dots + H_N + \\ + O\left(|p|^{N+1} + |q|^{N+1}\right),$$

где $p = (p_1, \dots, p_n)$ и $q = (q_1, \dots, q_n)$ — подходящие канонически сопряженные переменные, а H_s — форма степени s от p_j, q_j. Коэффициенты ω_j суть собственные частоты системы (а $\pm i\omega_j$ — собственные числа линеаризованной системы). Резонансным соотношением (или просто *резонансом*) называется соотношение вида $l_1\omega_1 + \cdots + l_n\omega_n = 0$, где $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ — целочисленный несократимый вектор. Число $|l| = |l_1| + \cdots + |l_n|$ называется порядком резонанса.

Пусть задан целочисленный несократимый вектор $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ с $|k| = |k_1| + \cdots + |k_n| \leqslant N$. Предположим, что частоты ω_j не удовлетворяют никаким резонансным соотношениям до порядка N включительно, кроме, быть может, соотношения $k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n = 0$. Тогда канонической заменой переменных $(p, q) \mapsto (P, Q)$, отличающейся от тождественной членами $O\left(|P|^2 + |Q|^2\right)$, в некоторой окрестности 0 гамильтониан приводится к k-резонансной нормальной форме с точностью до членов $O\left(|P|^{N+1} + |Q|^{N+1}\right)$ — см., например, [1]. Это означает, что в разложении гамильтониана по переменным P_j, Q_j сумма всех членов порядков $\leqslant N$, записанная в симплектических полярных координатах ρ_j, φ_j:

$$P_j = \sqrt{2\rho_j}\cos\varphi_j, \quad Q_j = \sqrt{2\rho_j}\sin\varphi_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

зависит от углов φ_j только через их комбинацию $\psi = k_1\varphi_1 + \cdots + k_n\varphi_n$. Отбрасывая в гамильтониане члены $O\left(|P|^{|k|+1} + |Q|^{|k|+1}\right)$, получим укороченный гамильтониан вида

$$\mathcal{H} = \omega_1\rho_1 + \cdots + \omega_n\rho_n + F(\rho_1, \ldots, \rho_n) + B\rho_1^{|k_1|/2} \cdot \ldots \cdot \rho_n^{|k_n|/2}\cos(\psi + \psi_0).$$

Здесь F — многочлен от ρ_j степени $\leqslant |k|/2$ без свободного и линейных членов, а B и ψ_0 — некоторые константы. Система с гамильтонианом $\mathcal{H}$ интегрируема.

Действительно, введем новые угловые переменные $\psi, \chi_1, \ldots, \chi_{n-1}$, так что замена

$$(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \mapsto (\psi, \chi_1, \ldots, \chi_{n-1})$$

задается целочисленной унимодулярной матрицей. Пусть $J, I_1, \ldots, I_{n-1}$ — импульсы, канонически сопряженные углам $\psi, \chi_1, \ldots, \chi_{n-1}$ (они являются линейными комбинациями величин $\rho_1, \ldots, \rho_n$ с целыми коэффициентами). В новых переменных гамильтониан $\mathcal{H}$ не зависит от $\chi_1, \ldots, \chi_{n-1}$. Поэтому $I_1, \ldots, I_{n-1}$ суть первые интегралы системы с гамильтонианом $\mathcal{H}$, а для J, ψ получается гамильтонова система с одной степенью свободы, гамильтониан которой зависит от $I_1, \ldots, I_{n-1}$ как от параметров. При исследовании движения вблизи резонанса важна зависимость еще от одного параметра — резонансной расстройки $\delta = k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n$. *Бифуркационной диаграммой* гамильтониана $\mathcal{H}$ называется разбиение окрестности начала координат в пространстве параметров $\delta, I_1, \ldots, I_{n-1}$ на подмножества, отвечающие различным типам фазовых портретов на плоскости J, ψ (остальные параметры, входящие в гамильтониан, — B и коэффициенты многочлена F — считаются фиксированными и удовлетворяющими некоторым условиям общности положения[1]).

Аналогичный анализ можно провести и в том случае, когда все собственные числа линеаризованной гамильтоновой системы отличны от нуля и чисто мнимы, но среди них допускаются кратные. Этот случай, впрочем, в рамках рассматриваемой задачи существен только для $n = 2$, возникающие при этом резонансы проявляются уже в квадратичных членах гамильтониана.

Сильными резонансами в условии задачи названы, по-видимому, резонансы наименьшего порядка, которым соответствуют топологически различные бифуркационные диаграммы. Для случая двух степеней свободы ($n = 2$) все бифуркационные диаграммы известны, результаты собраны в [1], сильные резонансы перечислены в условии задачи. Для случая трех степеней свободы ($n = 3$) задача, насколько известно авторам настоящего комментария, остается открытой.

Представляет значительный интерес вопрос о том, как связаны перестройки — при прохождении через резонанс — фазового портрета системы с укороченным гамильтонианом $\mathcal{H}$ и исходной системы с полным гамильтонианом H. В целом бифуркациям гладких однопараметрических семейств периодических траекторий системы с гамильтонианом $\mathcal{H}$ отвечают такие же бифуркации гладких однопараметрических семейств периодических траекторий системы с гамильтонианом H, но бифуркациям гладких ν-параметрических семейств инвариантных ν-мерных торов системы с гамильтонианом $\mathcal{H}$ (движение на которых выпрямляемо) при $\nu \geqslant 2$ отвечают, вообще говоря, — вследствие неинтегрируемости — бифуркации *канторовых* ν-параметрических семейств инвариантных ν-мерных торов системы с гамильтонианом H (движение на которых квазипериодично).

---

[1] Разным значениям этих параметров могут соответствовать разные бифуркационные диаграммы. Поэтому с каждым резонансом, вообще говоря, связана не одна бифуркационная диаграмма, а конечный набор диаграмм.

Однопараметрическим семействам периодических траекторий гамильтоновых систем вблизи и в момент резонанса посвящено очень большое число работ. Краткий обзор многих из них приведен в диссертации [2]. Среди основных работ отметим [1, 3–5]. Подробное исследование бифуркаций семейств периодических траекторий в важном частном случае задачи трех тел проведено в монографии [6].

С другой стороны, бифуркации канторовых ν-параметрических семейств инвариантных ν-мерных торов ($\nu \geqslant 2$) при прохождении резонанса в гамильтоновых системах практически не изучены даже в случае двух степеней свободы. Такие бифуркации относятся к т. н. *quasi-periodic bifurcation theory*, которая к настоящему времени развита в основном только для общих (негамильтоновых) систем [7–10] (из первых работ по quasi-periodic bifurcation theory для гамильтоновых систем отметим [11]).

Обширная литература посвящена исследованию динамики вблизи резонансных положений равновесия гамильтоновых систем в целом. Здесь мы укажем — с чисто иллюстративными целями — лишь пять недавних работ [12–16]. В [12–14, 16] рассматриваются также кратные резонансы ($|\omega_1| : |\omega_2| : |\omega_3| = m_1 : m_2 : m_3$) и приводится соответствующая библиография.

[1] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 3 (Динамические системы–3). М.: ВИНИТИ, 1985, гл. 7, § 3.

[2] Севрюк М. Б. Обратимые динамические системы. Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 1987.

[3] Henrard J. Periodic orbits emanating from a resonant equilibrium. *Celest. Mech.*, 1970, **1**(3/4), 437–466.

[4] Schmidt D. S. Periodic solutions near a resonant equilibrium of a Hamiltonian system. *Celest. Mech.*, 1974, **9**(1), 81–103.

[5] Duistermaat J. J. Bifurcations of periodic solutions near equilibrium points of Hamiltonian systems. In: Bifurcation Theory and Applications. Editor: L. Salvadori. Berlin: Springer, 1984, 57–105. (Lecture Notes in Math., 1057.)

[6] Брюно А. Д. Ограниченная задача трех тел. Плоские периодические орбиты. М.: Наука, 1990.

[7] Braaksma B. L. J., Broer H. W. On a quasi-periodic Hopf bifurcation. *Ann. Institut Henri Poincaré, Analyse non linéaire*, 1987, **4**(2), 115–168.

[8] Broer H. W. On some quasi-periodic bifurcations. *Delft Progress Report*, 1988, **12**(1), 79–96.

[9] Braaksma B. L. J., Broer H. W., Huitema G. B. Towards a quasi-periodic bifurcation theory. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1990, **83**(421), 83–170.

[10] Broer H. W., Huitema G. B., Sevryuk M. B. Quasi-Periodic Motions in Families of Dynamical Systems: Order amidst Chaos. Berlin: Springer, 1996, Sect. 4.3. (Lecture Notes in Math., 1645.)

[11] Hanßmann H. The quasi-periodic centre-saddle bifurcation. *J. Differ. Equations*, 1998, **142**(2), 305–370.

[12] Hoveijn I. Aspects of resonance in dynamical systems. PhD Thesis, University of Utrecht, 1992.

[13] Haller G., Wiggins S. Whiskered tori and chaos in resonant Hamiltonian normal forms. In: Normal Forms and Homoclinic Chaos. Editors: W. F. Langford and W. Nagata. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995, 129–149. (Fields Institute Commun., 4.)

[14] Haller G., Wiggins S. Geometry and chaos near resonant equilibria of 3-DOF Hamiltonian systems. *Physica D*, 1996, **90**(4), 319–365.

[15] Joyeux M. Classical dynamics of the 1 : 1, 1 : 2 and 1 : 3 resonance Hamiltonians. *Chem. Physics*, 1996, **203**(3), 281–307.

[16] Wiggins S. Phase space geometry and dynamics associated with the 1 : 2 : 2 resonance. In: Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom. Editor: C. Simó. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999, 254–269. (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 533.)

А. И. Нейштадт, М. Б. Севрюк

1978-17

Рассмотрим систему линейных уравнений Эйлера–Лагранжа с частными производными, возникающую из некоторого вариационного принципа

$$\delta \int L\, dt\, dx^1 \cdots dx^D = 0$$

с лагранжианом $L(t, x, u_t, u_x) = T(t, x, u_t) - V(t, x, u_x)$, где $t, x^1, \ldots, x^D$ — независимые переменные, $u^1, \ldots, u^m$ — зависимые переменные, плотность кинетической энергии T — положительно определенная квадратичная форма от первых временны́х производных зависимых переменных, а плотность потенциальной энергии V — неотрицательно определенная квадратичная форма от первых пространственных производных зависимых переменных. В общем случае коэффициенты обеих форм являются функциями от t и x. Распространение возмущений в упругой среде является хорошим модельным примером описываемой ситуации, в котором u — вектор смещения точки среды, и количество зависимых переменных, таким образом, равно размерности x-пространства $(m = D)$.

Как известно, распространение фронтов и лучей ударных и коротких волн описывается на уровне геометрической оптики *световой гиперповерхностью*, которая лежит в проективизованном кокасательном расслоении над пространством-временем и на которой вырождается главный символ исходной системы уравнений с частными производными. В координатах этот символ представляет собой симметрическую $m \times m$-матрицу с коэффициентами

$$T_{ij}(t,x)\omega^2 - \sum_{k,l=1}^{D} V_{ij}^{kl}(t,x)p_k p_l,$$

где (t,x) — точка пространства-времени, импульс (ω, p) — кокасательный вектор к пространству-времени, а T_{ij} и V_{ij}^{kl} — коэффициенты плотностей кинетической и потенциальной энергии:

$$T(t,x,u_t) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} T_{ij}(t,x)u_t^i u_t^j, \quad V(t,x,u_x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{D} V_{ij}^{kl}(t,x)u_{x^k}^i u_{x^l}^j.$$

Из-за условий положительной и неотрицательной определенности кинетической и потенциальной энергии соответственно система уравнений Эйлера–Лагранжа является гиперболической. Особенности световой гиперповерхности проектируются в точки пространства-времени, в которых эта гиперболичность нестрогая. Если зависимых переменных две или больше, то световая гиперповерхность может иметь особенности, неустранимые малым возмущением коэффициентов лагранжиана как функций от t и x. Задача состоит в том, чтобы описать как сами эти особенности, так и вызываемые ими особенности распространения волн. (Подробнее см. комментарии к задачам *1988-3* и *1989-10*.)

Предполагается, что коэффициенты лагранжиана общим образом зависят от точки пространства и, быть может, от времени. Это условие на физическом языке, в частности, означает, что рассматриваемая среда неоднородна и анизотропна. Аналогичное явление встречается также и в однородных средах и называется коническим преломлением Гамильтона в кристаллах. Однако геометрическая оптика внутреннего рассеяния в типичных неоднородных и анизотропных средах существенно отличается от гамильтонова конического преломления.

Типичные особенности световой гиперповерхности описаны в [1]. Оказывается, что эти особенности такие же, как и особенности подмножества вырожденных матриц в пространстве симметрических. Например, простейшая особенность световой гиперповерхности (называемая *конической*) — это произведение обычного двумерного конуса $\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2$ на $(2D-2)$-мерное векторное пространство. Описание особенностей световой гиперповерхности опирается на теорему трансверсальности для однородных отображений, доказанную в [2].

Нормальные формы пары, состоящей из общей контактной структуры и $2D$-мерной гиперповерхности, в окрестности ее конической особенности найдены для $D = 1$ в [1], а для $D \geqslant 2$ — в [3] (см. также задачу *1988-3*). В обоих случаях имеются две нормальные формы — эллиптическая и гиперболическая, однако явные формулы проще при $D \geqslant 2$. Согласно [1], при $D = 1$ эллиптическая нормальная форма невозможна для световых гиперповерхностей из-за гиперболичности самой системы уравнений Эйлера–Лагранжа, но, как показано в [4], она реализуется, если $D \geqslant 2$. Конические особенности световой гиперповерхности являются причиной гамильтонова преломления в кристаллах, но контактная структура в этом случае не является общей из-за однородности и поэтому не приводится ни к эллиптической, ни к гиперболической нормальной форме.

Особенности типичных лежандровых подмногообразий световой гиперповерхности, проходящих через ее конические особенности, при $D = 2$ описаны в [5–6], а соответствующие особенности больших фронтов, систем лучей на них и перестройки мгновенных фронтов исследованы в [7–9] (см. задачу *1989-10*). При $D = 3$ не описаны даже особенности лежандровых подмногообразий, возникающие при внутреннем рассеянии, не говоря уже о соответствующих особенностях больших фронтов, системах лучей на них и перестройках мгновенных фронтов.

Наиболее полно с вышеизложенной тематикой можно ознакомиться по книге [6] (см. главу 8 «Трансформации волн, определенных гиперболическими вариационными принципами»). Некоторые открытые топологические вопросы, связанные с обсуждаемой задачей, сформулированы там на с. 282. Эта книга, в отличие от ее первоначального издания [5] на английском языке, содержит описание особенностей больших фронтов, систем лучей на них и перестроек мгновенных фронтов при $D = 2$, впервые опубликованное в статье [8]. Однако ссылка на эту статью в книге [6] содержит опечатку — вместо [20] в примечании на с. 300 следует читать [201].

[1] Арнольд В. И. О поверхностях, определяемых гиперболическими уравнениями. *Матем. заметки*, 1988, **44**(1), 3–18. [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 397–412.]

[2] Khesin B. A. Singularities of light hypersurfaces and structure of hyperbolicity sets for systems of partial differential equations. In: Theory of Singularities and its Applications. Editor: V. I. Arnol′d. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990, 119–127. (Advances in Soviet Math., 1.)

[3] Arnol′d V. I. On the interior scattering of waves, defined by hyperbolic variational principles. *J. Geom. Phys.*, 1988, **5**(3), 305–315.

[4] Braam P. J., Duistermaat J. J. Normal forms of real symmetric systems with multiplicity. *Indag. Math.* (*N. S.*), 1993, **4**(4), 407–421.

[5] Arnol′d V. I. Singularities of Caustics and Wave Fronts. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990. (Math. Appl., Soviet Ser., 62.)

[6] Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996.

[7] Богаевский И. А. Внутреннее рассеяние лучей и волновых фронтов на плоскости. В кн.: Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996, § 8.5, 300–316.

[8] Богаевский И. А. Особенности распространения коротких волн на плоскости. *Матем. сборник*, 1995, **186**(11), 35–52.

[9] Bogaevskiĭ I. A. Singularities of short linear waves on the plane. In: The Arnol′d–Gel′fand Mathematical Seminars: Geometry and Singularity Theory. Editors: V. I. Arnol′d, I. M. Gel′fand, V. S. Retakh and M. Smirnov. Boston, MA: Birkhäuser, 1997, 107–112.

И. А. Богаевский

1978-19

См. статью В. И. Бахтина [1].

[1] Бахтин В. И. Топологические нормальные формы перестроек каустик серии D_μ. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1987, № 4, 58–61.

1979

1979-2

См. комментарий к задаче *1972-3*.

1979-3, а также *1980-11*

Эта задача решена Варченко [1] (см. также [2]) и Стинбринком [3]. Варченко [1–2] доказал полунепрерывность спектра квазиоднородной особенности только относительно нижних деформаций. Этот результат он применил к задаче Брюса (см. задачу *1981-24*). Полунепрерывность спектра особенности и смежные результаты обсуждаются в обзоре [4].

См. также комментарий к задаче *1975-8*.

[1] Варченко А. Н. О полунепрерывности спектра и оценке сверху числа особых точек проективной гиперповерхности. *ДАН СССР*, 1983, **270**(6), 1294–1297.

[2] Варченко А. Н. Асимптотики интегралов и структуры Ходжа. В кн.: Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики, т. 22. М.: ВИНИТИ, 1983, 130–166.

[3] Steenbrink J. H. M. Semicontinuity of the singularity spectrum. *Invent. Math.*, 1985, **79**(3), 557–565.

[4] Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В. Особенности. I. Локальная и глобальная теория. Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 6 (Динамические системы–6). М.: ВИНИТИ, 1988, гл. 2, § 4.8.

С. В. Чмутов

1979-4

Ориентируемость — это тривиальность первого класса Штифеля–Уитни. Поэтому естественно ожидать, что ее комплексификация — это тривиальность первого класса Чженя.

См. также комментарии к задаче *1985-11*.

В. А. Васильев

* * *

1979-4, а также *1980-12*

Возможная комплексификация теории гомологий — теория «полярных гомологий» — предложена А. А. Рослым и Б. А. Хесиным в [1–2]. В этих же работах предложено считать произвольную мероморфную форму объема на комплексном многообразии неформальной комплексификацией понятия ориентации вещественного многообразия. Такое соответствие согласуется с теорией «полярных гомологий». Наконец, в [1–2] обсуждается комплексификация родственного гомологиям понятия — числа зацепления, и определяется голоморфное число зацепления пары комплексных кривых в трехмерном комплексном многообразии.

См. также комментарии к задаче *1985-11*.

[1] Khesin B. A., Rosly A. A. Symplectic geometry on moduli spaces of holomorphic bundles over complex surfaces. In: Proceedings of the Arnol′dfest (Toronto, 1997). Editors: E. Bierstone et al. *Fields Institute Commun.* (to appear).

[2] Khesin B. A., Rosly A. A. Holomorphic linking and homology of complex manifolds (in preparation).

Б. А. Хесин

1979-6, а также *1976-14* и *1980-16*

В близкой задаче о связи между вещественной и комплексной *собственными* модальностями, т. е. числами непрерывных параметров страта $\mu = \text{const}$, отрицательный ответ дан в работе [1]. По теореме А. М. Габриэлова в комплексном случае модальность и собственная модальность совпадают. Поэтому из примера статьи [1] вытекает, что верно по крайней мере одно из двух: либо вещественная и комплексная модальности могут не совпадать, либо теорема Габриэлова не имеет аналога для вещественных особенностей. Предположительно верно и то, и другое.

См. также комментарий к задаче *1975-23*.

[1] Васильев В. А., Серганова В. В. О числе вещественных и комплексных модулей особенностей гладких функций и реализаций матроидов. *Матем. заметки*, 1991, **49**(1), 19–27.

В. А. Васильев

1979-8

Каустика — это множество критических значений лагранжева отображения. Дискриминант, т. е. бифуркационная диаграмма нулей, — это образ $\mathfrak{m}^2$. В особенности дискриминанта (а следовательно, и в каустику) переходят элементы $\mathfrak{m}^2$, у которых квадратичная часть вырождена. Поэтому неприводимость каустики вытекает из неприводимости множества вырожденных квадратичных форм. В типичные (типа A_3) особенности каустики при этом могут переходить только точки $\mathfrak{m}^2$, у которых ядро квадратичной части одномерно и лежит в множестве нулей кубичной части исходной функции f.

Число неприводимых компонент многообразия особенностей каустики неморсовской особенности может равняться 1, 2 или 3. Оно равно числу неприводимых компонент множества нулей кубичной части f, ограниченной на ядро квадратичной части.

Любой класс особенностей каустики *стабильно неприводим*, т. е. найдется настолько сложная особенность от того же числа переменных, что в ее каустике этот класс неприводим, и то же верно для любой более сложной особенности. То же верно и для мультиособенностей каустик, см. [1].

Однако в качестве этой «достаточно сложной особенности» недостаточно взять просто функцию с достаточно большим числом Милнора. Например, для сколь угодно больших $a > 4$ и $b > 4$ в каустике особенности $x^2y^2 + x^a + y^b$ страт X_{10} (содержащий особенность $x^2y^2 + x^4 + y^5$) представлен двумя компонентами.

[1] Васильев В. А. Стабильные когомологии дополнений к дискриминантам деформаций особенностей гладких функций. В кн.: Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, т. 33. М.: ВИНИТИ, 1988, 3–29.

В. А. Васильев

1979-15

Эта задача связана с разрешением сложных особых точек векторных полей на плоскости с помощью σ-процесса (см. [1]) алгебраической геометрии. Невырожденные особые точки, появляющиеся в этой ситуации, расклассифицированы в [2] по отношению орбитальной эквивалентности векторных полей. Они, естественно, являются конечно-модальными. При σ-процессе прямая или пара прямых возникают на накрывающем многообразии и проектируются в особую точку исходного векторного поля.

[1] Dumortier F. Singularities of vector fields on the plane. *J. Differ. Equations*, 1977, **23**(1), 53–106.

[2] Bogdanov R. I. Singularities of vector fields on the plane with pointed direction. *Invent. Math.*, 1979, **54**(3), 247–259.

Р. И. Богданов

1979-16

Это задача из статьи [1] (с. 16: задача 10).

[1] Арнольд В. И., Олейник О. А. Топология действительных алгебраических многообразий. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1979, № 6, 7–17.

1979-17

Это задача из статьи [1] (с. 15: задача 1).

[1] Арнольд В. И., Олейник О. А. Топология действительных алгебраических многообразий. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1979, № 6, 7–17.

1979-18

Это задача из статьи [1] (с. 15: задача 2).

[1] Арнольд В. И., Олейник О. А. Топология действительных алгебраических многообразий. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1979, № 6, 7–17.

1979-19

Это задача из статьи [1] (с. 15: задача 3).

[1] Арнольд В. И., Олейник О. А. Топология действительных алгебраических многообразий. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1979, № 6, 7–17.

1979-20

Это задача из статьи [1] (с. 15–16: задача 4).

[1] Арнольд В. И., Олейник О. А. Топология действительных алгебраических многообразий. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1979, № 6, 7–17.

1979-21

Это задача из статьи [1] (с. 16: задача 5).

[1] Арнольд В. И., Олейник О. А. Топология действительных алгебраических многообразий. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1979, № 6, 7–17.

1979-22

Это задача из статьи [1] (с. 16: задача 6).

[1] Арнольд В. И., Олейник О. А. Топология действительных алгебраических многообразий. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1979, № 6, 7–17.

1979-23

Это задача из статьи [1] (с. 16: задача 7).

[1] Арнольд В. И., Олейник О. А. Топология действительных алгебраических многообразий. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1979, № 6, 7–17.

1979-24

Это задача из статьи [1] (с. 16: задача 8).

[1] **Арнольд В. И., Олейник О. А.** Топология действительных алгебраических многообразий. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1979, № 6, 7–17.

1979-25

Это задача из статьи [1] (с. 16: задача 9).

[1] **Арнольд В. И., Олейник О. А.** Топология действительных алгебраических многообразий. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1979, № 6, 7–17.

1979-26

Это задача из статьи [1] (с. 16: задача 11).

[1] **Арнольд В. И., Олейник О. А.** Топология действительных алгебраических многообразий. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1979, № 6, 7–17.

1979-27

Это задача из статьи [1] (с. 16: задача 12).

[1] **Арнольд В. И., Олейник О. А.** Топология действительных алгебраических многообразий. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1979, № 6, 7–17.

1980

1980-4

В задаче речь идет об исследованиях Е. А. Демёхина, опубликованных в статье [1].

В этой статье обсуждается ответвление 2π-периодических решений уравнения

$$s^2U^{\mathrm{IV}} + U'' + (U')^2 = Q \qquad (1)$$

от $2\pi/n$-периодических решений (обозначения статьи несколько отличаются от первоначальных обозначений Е. А. Демёхина, использованных в условии задачи; на самом деле в статье рассматривается в основном эквивалентная задача о периодических решениях уравнения

$$s^2H''' + H' + H^2 = Q$$

с нулевым средним, здесь H — толщина пленки жидкости, s — волновое число, а Q — т. н. нелинейное искажение расхода).

Оказывается, значения параметров s и Q, при которых уравнение (1) имеет $2\pi/n$-периодические решения, образуют на плоскости (s, Q) кривые Γ_n, выходящие из точек $(s = 1/n,\ Q = 0)$ в сторону меньших s. От некоторых точек на этих кривых отходят другие кривые γ_n, характеризующиеся тем, что при $(s, Q) \in \gamma_n$ уравнение (1) имеет 2π-периодические решения.

Такие бифуркации связаны с *обратимостью* уравнения (1) относительно инволюции

$$G : (U, U', U'', U''') \mapsto (U, -U', U'', -U''')$$

фазового пространства $\mathbb{R}^4$ и инвариантностью этого уравнения относительно сдвигов $U \mapsto U + \mathrm{const}$. Вследствие обратимости G-инвариантные замкнутые фазовые траектории уравнения (1) при фиксированных s и Q образуют однопараметрические семейства $U_C = U_0 + C$, $C = \mathrm{const}$, *устойчивые относительно малых шевелений параметров* s *и* Q. Условие того, что период этих траекторий равен заданному числу $T > 0$, выделяет на плоскости параметров (s, Q) кривую. Кривые γ_n отходят от тех точек кривых Γ_n, где мультипликаторы соответствующих $2\pi/n$-периодических решений равны 1, $e^{\pm 2\pi p i/n}$ $(1 \leqslant p \leqslant n - 1$, $\text{НОД}(p, n) = 1)$.

Из обширной литературы, посвященной периодическим решениям обратимых систем дифференциальных уравнений, мы укажем лишь важнейшие работы [2–7], в которых рассматривается ответвление решений периода nT от решений периода T (или, что эквивалентно, рождение периодических орбит периода n из неподвижных точек обратимых отображений).

[1] Демёхин Е. А. Ветвление решения задачи о стационарных бегущих волнах в слое вязкой жидкости на наклонной плоскости. *Изв. АН СССР, сер. мех. жидкости и газа*, 1983, **5**, 36–44.

[2] Sevryuk M. B. Reversible Systems. Berlin: Springer, 1986, § 5.4. (Lecture Notes in Math., 1211.)

[3] Vanderbauwhede A. Bifurcation of subharmonic solutions in time-reversible systems. *Z. Angew. Math. Phys.*, 1986, **37**(4), 455–478.

[4] Gervais J.-J. Bifurcations of subharmonic solutions in reversible systems. *J. Differ. Equations*, 1988, **75**(1), 28–42; addendum: 1989, **78**(2), 400.

[5] Vanderbauwhede A. Subharmonic branching in reversible systems. *SIAM J. Math. Anal.*, 1990, **21**(4), 954–979.

[6] Furter J. E. On the bifurcations of subharmonics in reversible systems. In: Singularity Theory and its Applications, Part II. Editors: M. Roberts and I. Stewart. Berlin: Springer, 1991, 167–192. (Lecture Notes in Math., 1463.)

[7] Vanderbauwhede A. Branching of periodic solutions in time-reversible systems. In: Geometry and Analysis in Nonlinear Dynamics. Editors: H. W. Broer and F. Takens. Harlow: Longman, 1992, 97–113. (Pitman Research Notes in Math. Series, 222.)

М. Б. Севрюк

1980-6

Задача о якобиане остается открытой; применить к ней смешанную структуру Ходжа никому не удалось.

А. Г. Хованский

1980-8

Контрпример к утверждению задачи построен в работе [1]. Этот пример дает также новый контрпример к гипотезе о гладкости страта $\mu = \mathrm{const}$ (см. задачи *1973-7* и *1976-13*, а также *1975-6* и *1975-24*).

[1] Васильев В. А., Серганова В. В. О числе вещественных и комплексных модулей особенностей гладких функций и реализаций матроидов. *Матем. заметки*, 1991, **49**(1), 19–27.

В. А. Васильев

1980-9

Это задача из статьи [1] (§ 5); см. также комментарий в [2] (p. 68).

[1] Arnol′d V. I. On some problems in singularity theory. In: Geometry and Analysis. Papers dedicated to the memory of V. K. Patodi. Bangalore: Indian Acad. Sci., 1980, 1–9. [*Reprinted in*: *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 1981, **90**(1), 1–9.]

[2] Arnol′d V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

* * *

1980-9

Впервые смешанные структуры Ходжа были применены в топологии вещественных алгебраических многообразий в работах [1–2].

[1] Харламов В. М. Обобщенное неравенство Петровского. I и II. *Функц. анализ и его прилож.*, 1974, **8**(2), 50–56; 1975, **9**(3), 93–94.

[2] Арнольд В. И. Индекс особой точки векторного поля, неравенства Петровского–Олейник и смешанные структуры Ходжа. *Функц. анализ и его прилож.*, 1978, **12**(1), 1–14.

С. В. Чмутов

1980-11

Это задача из статьи [1] (§ 1); см. также комментарий в [2] (p. 68).

[1] Arnol′d V. I. On some problems in singularity theory. In: Geometry and Analysis. Papers dedicated to the memory of V. K. Patodi. Bangalore: Indian Acad. Sci., 1980, 1–9. [*Reprinted in*: *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 1981, **90**(1), 1–9.]

[2] Arnol′d V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

См. комментарии к задачам *1975-8* и *1979-3*.

1980-12

См. комментарий Б. А. Хесина к задаче *1979-4*.

1980-14

Это задача из статьи [1] (§ 2); см. также комментарий в [2] (p. 68).

[1] Arnol′d V. I. On some problems in singularity theory. In: Geometry and Analysis. Papers dedicated to the memory of V. K. Patodi. Bangalore: Indian Acad. Sci., 1980, 1–9. [*Reprinted in*: *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 1981, **90**(1), 1–9.]

[2] Arnol′d V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

См. комментарии к задачам *1972-27*, *1993-27* и *1998-9*.

1980-15

Это задача из статьи [1] (§ 3); см. также комментарий в [2] (p. 68).

[1] Arnol′d V. I. On some problems in singularity theory. In: Geometry and Analysis. Papers dedicated to the memory of V. K. Patodi. Bangalore: Indian Acad. Sci., 1980, 1–9. [*Reprinted in*: *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 1981, **90**(1), 1–9.]

[2] Arnol′d V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

1980-16

Это задача из статьи [1] (§ 4); см. также комментарий в [2] (p. 68).

[1] Arnol′d V. I. On some problems in singularity theory. In: Geometry and Analysis. Papers dedicated to the memory of V. K. Patodi. Bangalore: Indian Acad. Sci., 1980, 1–9. [*Reprinted in*: *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 1981, **90**(1), 1–9.]

[2] Arnol'd V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

См. комментарий к задаче *1979-6.*

1980-17

Это задача из статьи [1] (§ 6); см. также комментарий в [2] (p. 68).

[1] Arnol'd V. I. On some problems in singularity theory. In: Geometry and Analysis. Papers dedicated to the memory of V. K. Patodi. Bangalore: Indian Acad. Sci., 1980, 1–9. [*Reprinted in: Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 1981, **90**(1), 1–9.]

[2] Arnol'd V. I. Some open problems in the theory of singularities. In: Singularities. Part 1 (Arcata, CA, 1981). Editor: P. Orlik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983, 57–69. (Proc. Symposia Pure Math., 40.)

См. комментарий к задаче *1972-3.*

1981

1981-1

Дискретные группы, порожденные отражениями относительно стенок симплексов в пространстве Лобачевского $\mathcal{H}^n$, были перечислены в статье [1] для $n \leqslant 3$ и в работе [2] для $n = 4$. Кроме того, Ф. Ланнер [2] доказал, что для $n > 4$ таких групп не существует.

[1] Coxeter H. S. M., Whitrow G. J. World-structure and non-Euclidean honeycombs. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 1950, **201**, 417–437.

[2] Lannér F. On complexes with transitive groups of automorphisms. *Comm. Sém. Math. Univ. Lund*, 1950, **11**, 71 p.

М. Б. Севрюк

1981-2

Краткий обзор теории Нехорошева дан в комментарии к задаче *1966-2*.

1981-4, а также *1984-17*

Задача решена отрицательно М. Л. Громовым в статье [1].

[1] Gromov M. L. Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.*, 1985, **82**(2), 307–347.

E. Ferrand

1981-6

В случае U$(n)/$O(n) задача решена в [1]. А именно, рассматриваемое кольцо изоморфно $\mathbb{Z}_2[x_5, x_9, x_{11}, \ldots]$ — кольцу многочленов над $\mathbb{Z}_2$ от всевозможных нечетномерных образующих x_i, $i \neq 2^k - 1$.

В случае U$(n)/$SO(n) рациональные когомологии те же, что у самого лагранжева грассманиана: $\lim \pi_{n+k} T\lambda_n \otimes \mathbb{Q} \cong H^*(\mathrm{U}(\infty)/\mathrm{O}(\infty), \mathbb{Q})$ [2]. Кроме того, первые 10 групп над $\mathbb{Z}$ вычислены M. Audin: $L_2 = 0$, $L_3 = L_4 = \mathbb{Z}_3$, $L_5 = L_6 = \mathbb{Z}$, $L_7 = L_8 = \mathbb{Z}_{15}$, $L_9 = \mathbb{Z}$, $L_{10} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ (а $L_1 = \mathbb{Z}$ согласно [3]).

[1] Smith L., Stong R. E. Exotic cobordism theories associated with classical groups. *J. Math. Mech.*, 1968, **17**(12), 1087–1102.

[2] Eliashberg Ya. M. Cobordisme des solutions de relations différentielles. In: Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie. I (Lyon, 1983). Editors: P. Dazord and N. Desolneux-Moulis. Travaux en Cours. Paris: Hermann, 1984, 17–31.

[3] Арнольд В. И. Лагранжевы и лежандровы кобордизмы. I и II. *Функц. анализ и его прилож.*, 1980, **14**(3), 1–13; **14**(4), 8–17.

В. А. Васильев

1981-7

Указанная гипотеза до сих пор не доказана и не опровергнута. В ослабленном варианте эта гипотеза доказана в статье [1], обобщающей частные результаты, полученные ранее Ч. Конли и Э. Цендером, М. Шапероном и другими авторами.

[1] Laudenbach F., Sikorav J.-C. Persistance d'intersection avec la section nulle au cours d'une isotopie hamiltonienne dans un fibré cotangent. *Invent. Math.*, 1985, **82**(2), 349–357.

E. Ferrand

1981-8

См. комментарий к задаче *1973-15*.

1981-12

См. комментарии к задачам *1972-27*, *1993-27* и *1998-9*.

1981-13

Ср. комментарий к задаче *1970-13*.

1981-14, а также *1982-11* и *1994-31*

Рассмотрим бесстолкновительную среду из невзаимодействующих частиц. Предположим, что в начальный момент времени скорость частицы, находящейся в точке x, была равна $v_0(x)$, где v_0 — гладкое векторное поле начальных скоростей. Тогда движение среды можно описать как однопараметрическое семейство отображений. А именно, для каждого t определено отображение $g_t : x \mapsto x + v_0(x)t$, переводящее начальное положение частицы в конечное. Отображение g_0 представляет собой тождественное преобразование, а при малых t отображение g_t взаимно однозначно и не имеет критических точек (т. е. точек, в которых ранг производной меньше максимально возможного). Однако, начиная с какого-то момента времени более быстрые частицы обгоняют более медленные, поле скоростей становится многозначным, а у отображения g_t появляются критические точки, что приводит к образованию скоплений частиц — плотность среды в критических значениях отображения g_t становится бесконечно большой.

Если поле начальных скоростей потенциально, то отображение g_t лагранжево, и на его каустике плотность среды бесконечно велика.

Таким образом, задача описания особенностей плотности и их перестроек при изменении t сводится к задаче описания лагранжевых особенностей и их перестроек, уже решенной в малых размерностях (см., например, [1]). Это остается справедливым, даже если частицы движутся во внешнем потенциальном гладком силовом поле, пусть даже и эволюционирующем во времени. Ситуация в корне меняется, если мы допускаем гравитационное взаимодействие между самими частицами. Дело в том, что после образования каустики создаваемое частицами гравитационное поле хотя и остается потенциальным, но перестает быть гладким, и обычная теория лагранжевых особенностей здесь неприменима. Однако, подробно обсуждаемая в § 6 работы [2] гипотеза утверждает, что особенности гравитационного поля не нарушают топологической картины перестроек каустик.

Эта гипотеза доказана в [3] для простейшего случая возникновения каустики в одномерной среде при типичных вещественно аналитических начальных условиях на поле скоростей и плотность. С математической точки зрения там построены локальные аналитические решения т. н. системы уравнений Власова–Пуассона, описывающей нашу ситуацию. Построенные решения соответствуют всевозможным бифуркациям возникновения каустик при типичных аналитических начальных условиях. График поля скоростей каждого такого решения представляет собой поверхность типа сборки, лежащую над двумерным пространством-временем. Эта поверхность не является гладкой вдоль полного прообраза каустики, точки которого можно разделить на три типа: точка сборки, две линии складки, две дополнительные линии над образом складки. Несколько неожиданно две линии складки вместе с точкой сборки оказываются гладкой кривой, а сама каустика — аналитической полукубикой. Это означает, что в рассматриваемом случае перестройка каустики такая же, как и без учета гравитации, не только топологически, но и аналитически! В [3–4] построены локальные аналитические решения, подробно описывающие особенности вдоль двух линий складки и двух дополнительных линий над образом складки.

Итак, математически полно изучена только перестройка, соответствующая рождению каустики в одномерной гравитационно взаимодействующей бесстолкновительной среде, да и то лишь при аналитических начальных условиях.

[1] Арнольд В. И. Теория катастроф, изд. 3-е. М.: Наука, 1990.

[2] Arnol′d V. I. Mathematical problems in classical physics. In: Trends and Perspectives in Applied Mathematics. Editors: F. John, J. E. Marsden and L. Sirovich. New York: Springer, 1994, 1–20. (Appl. Math. Sci., 100.) [*Перевод на русский язык в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 553–575.]

[3] Roytvarf A. A. On the dynamics of a one-dimensional self-gravitating medium. *Physica D*, 1994, **73**(3), 189–204.

[4] Ройтварф А. А. О двузначном поле скоростей с коренной особенностью. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1988, № 3, 41–44.

[5] Ройтварф А. А. О движении сплошной среды в силовом поле с коренной особенностью. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1987, № 1, 65–68.

И. А. Богаевский

1981-16

Ответ на вопрос задачи положительный, см., например, монографию [1].

[1] Il′yashenko Yu. S. Finiteness Theorems for Limit Cycles. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991. (Transl. Math. Monographs, 94.)

1981-18, а также *1994-28* и *1994-29*

Да, существует, см. статьи [1–2] (и обсуждение в книге [3]), а также задачу *1993-31*.

[1] Klapper I., Young L.-S. Rigorous bounds on the fast dynamo growth rate involving topological entropy. *Commun. Math. Phys.*, 1995, **173**(3), 623–646.

[2] Kozlovskiĭ O. S. An integral formula for topological entropy of C^∞ maps. *Ergod. Theory Dynam. Syst.*, 1998, **18**(2), 405–424.

[3] Arnol′d V. I., Khesin B. A. Topological Methods in Hydrodynamics. New York: Springer, 1998. (Appl. Math. Sci., 125.) [*Перевод на русский язык*: Арнольд В. И., Хесин Б. А. Топологические методы в гидродинамике. М.: ФАЗИС, готовится к изданию.]

Б. А. Хесин

1981-22

Задача решена в диссертации С. К. Ландо [1] во всех случаях, за исключением отдельных «резонансных» показателей α. Полное доказательство (включая резонансный случай) опубликовано в [2–3].

Предыдущие результаты:

А. Б. Гивенталь [4] — одномерный аргумент x и серия показателей $\alpha = 1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots$

В. П. Костов [5] — одномерный аргумент x, произвольные показатели.

Задача о нормальных формах для рассматриваемых объектов была независимо решена С. К. Ландо [6] и А. Н. Варченко [7].

[1] Ландо С. К. Деформации дифференциальных форм. Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 1985.

[2] Kostov V. P., Lando S. K. Versal deformations of powers of volume forms. In: Computational Algebraic Geometry (Nice, 1992). Editors: F. Eyssette and A. Galligo. Boston, MA: Birkhäuser, 1993, 143–162. (Progr. Math., 109.)

[3] Ландо С. К. Деформации дифференциальных форм. *Труды МИРАН им. В. А. Стеклова*, 1995, **209**, 167–199.

[4] Гивенталь А. Б. Лагранжевы многообразия с особенностями и неприводимые sl_2-модули. *Успехи матем. наук*, 1983, **38**(6), 109–110.

[5] Костов В. П. Версальные деформации дифференциальных форм степени α на прямой. *Функц. анализ и его прилож.*, 1984, **18**(4), 81–82.

[6] Ландо С. К. Нормальные формы степеней форм объема. *Функц. анализ и его прилож.*, 1985, **19**(2), 78–79.

[7] Варченко А. Н. О локальной классификации форм объема в присутствии гиперповерхности. *Функц. анализ и его прилож.*, 1985, **19**(4), 23–31.

С. К. Ландо

1981-23

Эта задача решена Вал. С. Куликовым [1]. Но позже выяснилось, что ответ был в действительности известен еще классикам [2].

[1] Куликов В. С. Исчисление особенностей вложения общей алгебраической поверхности в проективное пространство P^3. *Функц. анализ и его прилож.*, 1983, **17**(3), 15–27.

[2] Salmon G. A Treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions. V. II. Fifth edition (1914), reprinted by Chelsea: New York, 1965.

В. А. Васильев

1981-24

Интерес семинара В. И. Арнольда к задаче о максимальном числе морсовских точек на гиперповерхности степени d начался с работы Брюса [1]. Оценка Брюса была улучшена в статье А. Б. Гивенталя [2].

Асимптотика (при $d \to \infty$) оценок сверху в этих работах имела вид $d^n/2$ для гиперповерхности степени d в $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Впервые эта асимптотика была улучшена А. Н. Варченко с помощью смешанной структуры Ходжа (см. комментарий к задаче *1979-3*). В частном случае $n = 3$ Варченко получил асимптотику $\frac{23}{48}d^3$. Впоследствии Мияока ее еще улучшил (только для случая $n = 3$ и не используя структур Ходжа) и получил $\frac{4}{9}d^3$ [3]. Наилучшая асимптотическая оценка снизу получена автором настоящего комментария и равняется $\frac{5}{12}d^3$ (для $n = 3$) [4].

При $n = 3$ точный ответ известен в следующих случаях:

— $d = 3$: это 4 (кубика Кэли);

— $d = 4$: это 16 (поверхность Куммера);

— $d = 5$: это 31 (пример построен Togliatti [5], оценка сверху Beauville [6], Гивенталя и Варченко);

— $d = 6$: это 65 (пример построен Barth [7], оценка сверху Jaffe & Ruberman [8]).

Ситуация с другими размерностями n следующая.

Точный ответ известен при $n = 4$, $d = 4$ и равен 45 (квартика Буркхарда [9], оценка сверху Варченко).

Известна также точная оценка для $d = 3$ и всех n, равная $C_{n+1}^{[n/2]}$ (оценка сверху Варченко). Примеры построили Т. Калкер [10] и В. В. Горюнов [11].

Горюнов получил в [11] также примеры с наилучшей асимптотикой при $d = 4$ и $n \to \infty$:

$$\sim \frac{3}{4} \cdot \frac{3^{n+1}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Верхняя оценка Варченко в этой ситуации дает

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3^{n+1}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Если рассмотреть сначала асимптотику при $d \to \infty$, а затем при $n \to \infty$, то примеры Чмутова дают такой главный член: $\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\, d^n$. А верхняя оценка Варченко — такой: $\sqrt{\frac{6}{\pi n}}\, d^n$.

[1] Bruce J. W. An upper bound for the number of singularities on a projective hypersurface. *Bull. London Math. Soc.*, 1981, **13**(1), 47–50.

[2] Гивенталь А. Б. О максимуме числа особых точек на проективной гиперповерхности. *Функц. анализ и его прилож.*, 1983, **17**(3), 73–74.

[3] Miyaoka Y. The maximal number of quotient singularities on surfaces with given numerical invariants. *Math. Ann.*, 1984, **268**(2), 159–171.

[4] Chmutov S. V. Examples of projective surfaces with many singularities. *J. Algebraic Geom.*, 1992, **1**(2), 191–196.

[5] Togliatti E. G. Sulle superficie algebriche col massimo numero di punti doppi. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, 1950, **9**, 47–59.

[6] Beauville A. Sur le nombre maximum de points doubles d'une surface dans P^3 ($\mu(5) = 31$). *J. Géométrie Algébrique d'Angers / Algebraic Geometry* (Angers, 1979). Editor: A. Beauville. Sijthoff and Noordhoff, 1980, 207–215.

[7] Barth W. Two projective surfaces with many nodes, admitting the symmetries of the icosahedron. *J. Algebraic Geom.*, 1996, **5**(1), 173–186.

[8] Jaffe D. B., Ruberman D. A sextic surface cannot have 66 nodes. *J. Algebraic Geom.*, 1997, **6**(1), 151–168.

[9] Burkhardt H. Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunktionen, Zweiter Teil. *Math. Ann.*, 1891, **38**, 161–224.

[10] Kalker T. Cubic fourfolds with fifteen ordinary double points. Thesis, Leiden, 1986.

[11] Goryunov V. V. Symmetric quartics with many nodes. In: Singularities and Bifurcations. Editor: V. I. Arnol′d. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994, 147–161. (Advances in Soviet Math., 21.)

С. В. Чмутов

1981-26

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей ∂D. Обозначим через $R(\lambda, D) = \lambda^n \operatorname{Vol}(D) - N(\lambda, D)$ разность между объемом области D, растянутой в λ раз, и числом $N(\lambda, D)$ точек с целыми координатами, находящихся в растянутой области. В работах Б. Рандела [1–3], И. Колен де Вердье [4] и А. Н. Варченко [5–6] получены оценки разности $R(\lambda, D)$ при $\lambda \to +\infty$, а также оценки, усредненные по поворотам и параллельным переносам области D. Асимптотика $R(\lambda, D)$ при больших λ зависит от особенностей кривизн и арифметических свойств границы ∂D. Оценки $R(\lambda, D)$ и близкие задачи подробно обсуждаются в книге [7]. Приложения к асимптотикам осциллирующих интегралов рассмотрены, например, в работах [7–8].

Влияние особенностей на асимптотики чисел целых точек на подмногообразиях евклидова пространства положительной коразмерности, а также на диофантовы приближения на этих подмногообразиях, насколько известно автору настоящего комментария, практически не изучено.

Смежные вопросы о числе рациональных точек т. н. ограниченной высоты на проективных алгебраических многообразиях рассмотрены в статье [9].

[1] Randol B. A lattice-point problem. I; II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1966, **121**, 257–268; **125**, 101–113.

[2] Randol B. On the Fourier transform of the indicator function of a planar set. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1969, **139**, 271–278.

[3] Randol B. On the asymptotic behavior of the Fourier transform of the indicator function of a convex set. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1969, **139**, 279–285.

[4] Colin de Verdière Y. Nombre de points entiers dans une famille homothétique de domaines de $\mathbb{R}^n$. *Ann. Sci. École Norm. Sup., Sér.* 4, 1977, **10**(4), 559–575.

[5] Варченко А. Н. О числе целых точек в области. *Успехи матем. наук*, 1982, **37**(3), 177–178.

[6] Варченко А. Н. О числе целых точек в семействах гомотетичных областей в $\mathbb{R}^n$. *Функц. анализ и его прилож.*, 1983, **17**(2), 1–6.

[7] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов. М.: Наука, 1984, § 6, п. 6.7.

[8] Попов Д. А. Оценки с константами для некоторых классов осциллирующих интегралов. *Успехи матем. наук*, 1997, **52**(1), 77–148.

[9] Batyrev V. V., Manin Yu. I. Sur le nombre des points rationnels de hauteur borné des variétés algébriques. *Math. Ann.*, 1990, **286**(1–3), 27–43. [*Перепечатано в сборнике*: Selected papers of Yu. I. Manin. River Edge, NJ: World Sci. Publ., 1996, 373–389.]

М. Б. Севрюк

1981-28, а также *1973-2*

Выпуклая оболочка подмножества аффинного пространства — это пересечение всех содержащих его полупространств. Граница выпуклой оболочки компактной гладкой гиперповерхности без края может иметь особенности. Например, особенности границы выпуклой оболочки общей замкнутой кривой на плоскости исчерпываются разрывами второй производной.

Задача состоит в том, чтобы исследовать с точностью до диффеоморфизмов особенности выпуклых оболочек общих компактных гладких (класса C^∞) гиперповерхностей без края, вложенных в четырехмерное аффинное пространство. Случай трехмерного пространства был исследован ранее в [1] (см. ниже).

Особенностью выпуклой оболочки мы называем ее росток в точке негладкости границы. Как обычно, *общие* гиперповерхности — это вложения, образующие открытое всюду плотное множество в снабженном C^∞-топологией пространстве всех рассматриваемых вложений. Иначе говоря, мы интересуемся лишь теми особенностями выпуклой оболочки, которые неустранимы малым шевелением исходной гиперповерхности.

На сегодняшний день поставленная задача «почти» решена. А именно, перечислены все возможные в случае общего положения особенности: $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2^0$, $\mathcal{R}_2^\pm$ [2], $\mathcal{R}_3$ и $\mathcal{V}_3$ [3]. Для всех них, кроме $\mathcal{R}_3$, найдены нормальные формы, содержащие не более одного числового *модуля* (непрерывного инварианта относительно диффеоморфизмов). Особенность же $\mathcal{R}_3$ не имеет функциональных модулей, но содержит по крайней мере девять числовых; точное количество числовых модулей неизвестно. В окрестности типичной точки границы выпуклая оболочка общей компактной гиперповерхности без края диффеоморфна замкнутому полупространству. Точки границы, в которых выпуклая оболочка имеет особенности $\mathcal{R}_1$, образуют гладкую двумерную поверхность. Особенности $\mathcal{R}_2^0$ возникают вдоль гладких кривых, а особенности $\mathcal{R}_2^\pm$, $\mathcal{R}_3$ и $\mathcal{V}_3$ — в отдельных точках границы выпуклой оболочки.

Об особенностях гладких подмногообразий аффинного пространства более высоких коразмерностей (например, пространственных кривых) см. комментарий к задаче *1972-12*.

Трехмерное пространство. Согласно [1], выпуклая оболочка общей компактной поверхности без края в трехмерном пространстве может иметь особенности лишь двух видов — простейшие и угловые в нашей терминологии. *Простейшие* особенности диффеоморфны подграфику квадрата расстояния от точки на плоскости до лежащей в ней полуплоскости. *Угловые* особенности диффеоморфны подграфику квадрата расстояния от точки на плоскости до лежащего в ней угла величины β, где $0 < \beta < \pi$ — числовой модуль. В окрестности типичной точки границы выпуклая оболочка общей компактной поверхности без края диффеоморфна замкнутому полупространству. Простейшие особенности возникают вдоль гладких кривых, а угловые — в отдельных точках границы выпуклой оболочки.

Четырехмерное пространство. Особенности $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2^0$ и $\mathcal{R}_2^{\pm}$, являющиеся стабилизациями простейших и угловых особенностей при переходе к четырехмерному пространству, найдены в [2]. Особенности $\mathcal{R}_1$ диффеоморфны подграфику квадрата расстояния от точки в трехмерном пространстве до лежащего в нем полупространства. Особенности $\mathcal{R}_2^0$, $\mathcal{R}_2^+$ и $\mathcal{R}_2^-$ диффеоморфны подграфику квадрата расстояния от точки в трехмерном пространстве до лежащего в нем двугранного угла $\{x \geqslant y \operatorname{ctg} \beta(z),\ y \geqslant 0\}$ переменной величины $\beta(z)$, где $\beta(z) = \beta_0 + z$, $\beta(z) = \beta_0 + z^2$ и $\beta(z) = \beta_0 - z^2$ соответственно, а $0 < \beta_0 < \pi$ — единственный числовой модуль в каждой из трех указанных нормальных форм.

В [3] описаны особенности $\mathcal{R}_3$ и $\mathcal{V}_3$ и доказано, что они завершают полный список особенностей выпуклых оболочек общих компактных гиперповерхностей без края, вложенных в четырехмерное пространство. Особенность $\mathcal{R}_3$ не содержит функциональных модулей, но нормальная форма для нее не найдена, так же как и точное количество числовых модулей. Известно только, что оно заведомо не меньше девяти, но на самом деле, по-видимому, намного больше. По определению, особенность $\mathcal{R}_3$ диффеоморфна ростку в нуле множества

$$\Bigl\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} : \min_{p,q,r \geqslant 0} F(p,q,r;x,y,z,t) \leqslant 0\Bigr\},$$

где F — многочлен, разложение которого на квазиоднородные составляющие при $\deg p = \deg q = \deg r = 1$, $\deg x = \deg y = \deg z = 1$ и $\deg t = 2$ имеет вид $F = F_2 + F_3 + \cdots$, причем

$$F_2 = p^2 + q^2 + r^2 + 2apq + 2bpr + 2cqr + 2px + 2qy + 2rz + t,$$

а числа a, b и c таковы, что квадратичная форма $p^2 + q^2 + r^2 + 2apq + 2bpr + 2cqr$ положительно определена. При некоторых F (например, при $F = F_2$) особенность $\mathcal{R}_3$ диффеоморфна подграфику квадрата расстояния от точки в трехмерном пространстве до лежащего в нем криволинейного трехгранного угла, но в общем случае это, по всей видимости, неверно.

Особенность $\mathcal{V}_3$ не содержит модулей и, по определению, диффеоморфна подграфику квадрата расстояния до замыкания V_3 той компоненты дополнения к ласточкину хвосту, которая состоит из многочленов, не имеющих вещественных корней:

$$V_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \forall\tau \in \mathbb{R}\ \tau^4 + x\tau^2 + y\tau + z \geqslant 0\right\}.$$

Граница выпуклой оболочки локально является графиком непрерывно дифференцируемой функции (см., например, [1]), типичные особенности которой — разрывы второй производной. В [4] показано, что множество таких разрывов в окрестности особенности $\mathcal{V}_3$ является парусником. *Парусник* — это объединение оборванного ласточкина хвоста (являющегося границей множества V_3) и половины зонтика Уитни, линии самопересечений которых совпадают, а касательные конусы трансверсальны. Согласно [4], все парусники локально диффеоморфны друг другу.

Высшие размерности. Согласно [5], начиная с пятимерного пространства выпуклая оболочка может иметь функциональные модули, неустранимые малым шевелением исходной компактной гиперповерхности без края. Например, они возникают как соотношения между несколькими числовыми модулями (которые уже имеются в четырехмерном пространстве) вдоль линий, образованных особенностями $\mathcal{R}_3$.

[1] Закалюкин В. М. Особенности выпуклых оболочек гладких многообразий. *Функц. анализ и его прилож.*, 1977, **11**(3), 76–77.

[2] Седых В. Д. Стабилизация особенностей выпуклых оболочек. *Матем. сборник*, 1988, **135**(4), 514–519.

[3] Богаевский И. А. Особенности выпуклых оболочек трехмерных гиперповерхностей. *Труды МИРАН им. В. А. Стеклова*, 1998, **221**, 81–100.

[4] Седых В. Д. Склейка ласточкиного хвоста и зонтика Уитни в четырехмерной управляемой системе. В кн.: Труды ГАНГ им. И. М. Губкина. М.: Нефть и газ, 1997, 58–68.

[5] Седых В. Д. Функциональные модули особенностей выпуклых оболочек многообразий коразмерностей 1 и 2. *Матем. сборник*, 1982, **119**(2), 233–247.

И. А. Богаевский

1982

1982-2

См. работу [1].

[1] Vaintrob A. Yu. Darboux theorem and equivariant Morse lemma. *J. Geom. Phys.*, 1996, **18**(1), 59–75.

Б. А. Хесин

1982-5

Важнейшие результаты в этом направлении (как для отображений тора, так и для векторных полей на торе) получены В. И. Арнольдом в статье [1] и О. Г. Галкиным в серии работ [2–7].

См. также задачу *1984-16*.

[1] Арнольд В. И. Замечания о теории возмущений для задач типа Матье. *Успехи матем. наук*, 1983, **38**(4), 189–203.

[2] Галкин О. Г. Резонансные области для динамических систем типа Матье. *Успехи матем. наук*, 1989, **44**(3), 153–154.

[3] Galkin O. G. Resonance regions for Mathieu type dynamical systems on a torus. *Physica D*, 1989, **39**(2–3), 287–298.

[4] Галкин О. Г. Фазовый захват для векторных полей на торе типа Матье. *Функц. анализ и его прилож.*, 1992, **26**(1), 1–8.

[5] Галкин О. Г. Фазовый захват для отображений тора типа Матье. *Функц. анализ и его прилож.*, 1993, **27**(1), 1–11.

[6] Galkin O. G. Phase-locking for maps of a torus: a computer assisted study. *Chaos*, 1993, **3**(1), 73–82.

[7] Galkin O. G. Phase-locking for dynamical systems on the torus and perturbation theory for Mathieu-type problems. *J. Nonlinear Sci.*, 1994, **4**(2), 127–156.

М. Б. Севрюк

1982-7

Эллиптические многочлены рассмотрены В. И. Матовым, см. ссылки [74], [76], [78] в [1] (и сам этот том [1]).

Гиперболические многочлены рассмотрены А. Д. Вайнштейном и Б. З. Шапиро, см. ссылку [28] в [1], а также нижеследующий комментарий Б. З. Шапиро. Отметим, что в ссылке [28] в [1] неправильно указаны страницы (вместо 55–78 следует читать 193–214).

[1] Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В. Особенности. II. Классификация и приложения. Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 39 (Динамические системы–8). М.: ВИНИТИ, 1989.

В. А. Васильев

* * *

1982-7

Вопрос подробно изучен в [1]. Доказаны стабилизации списка особенностей и особенностей границ при фиксированном числе параметров и росте степени и числа переменных или только степени. Приведены списки простых (мульти)особенностей. Изучена связь эллиптических и гиперболических особенностей.

[1] Вайнштейн А. Д., Шапиро Б. З. Особенности границы области гиперболичности. В кн.: Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, т. 33. М.: ВИНИТИ, 1988, 193–214.

Б. З. Шапиро

1982-11

См. комментарий к задаче *1981-14*.

1982-16

Элементарное доказательство более сильного утверждения (о полунепрерывности спектра) для $n = 2$ было дано С. К. Ландо в 1981 г. В произвольной размерности элементарное доказательство полунепрерывности спектра, кажется, также имеется.

С. К. Ландо

1982-17

Случай квадрик, о котором идет речь в условии задачи, рассмотрен в статье [1].

[1] Вайнштейн А. Д., Шапиро Б. З. Многомерные аналоги теорем Ньютона и Айвори. *Функц. анализ и его прилож.*, 1985, **19**(1), 20–24.

1982-20

Одной из естественных классификационных задач является классификация ростков векторных полей в особой точке. В категории C^∞ классификацию можно понимать по отношению C^∞-орбитальной эквивалентности ростков фазовых портретов в особой точке гладких векторных полей. В работе [1] показано, что, начиная с вырождений коразмерности два, особые точки векторных полей имеют функциональные модули по отношению к C^∞-орбитальной эквивалентности. Там же доказано, что возникающие функциональные модули представляются конечным набором функций от одной переменной.

Простейший пример, когда функциональный модуль является одной функцией от одной переменной, доставляют вырожденные векторные поля на плоскости (вырождение конечной коразмерности), имеющие матрицей линеаризации в особой точке нильпотентную жорданову клетку. В [1] показано, что в случае общего положения (в классе рассматриваемых систем) в этой функции от одной переменной «убиваются» мономы, степень которых дается арифметической прогрессией. Таким образом, в этом случае ряд Пуанкаре особенности очевидно является рациональной функцией.

В общем случае, когда число функций, представляющих функциональные модули, больше единицы, имеется очевидная оценка сверху на коэффициенты ряда Пуанкаре. К сожалению, до настоящего времени не доказано, что и в этом случае «убиваются» мономы, степени которых составляют арифметическую прогрессию (неизвестно, одну или несколько), хотя это кажется вполне правдоподобной гипотезой.

В [2–3] в случае $\mathbb{R}^n$ показано, что при наличии однократного резонанса собственных чисел матрицы линеаризации, а также жордановых блоков, ряды Пуанкаре являются рациональными функциями.

В [4] разобраны конечно-модальные особенности векторных полей на плоскости относительно симплектической орбитальной эквивалентности. Отметим также, что для конечно-модальных особых точек ряд Пуанкаре является многочленом (т. е. обрывается). Особые точки общего положения векторных полей на плоскости конечно-модальны относительно C^∞-орбитальной эквивалентности.

[1] Богданов Р. И. Локальные орбитальные нормальные формы векторных полей на плоскости. *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, 1979, **5**, 51–84.

[2] Богданов Р. И. Конечноопределенные локальные фазовые портреты векторных полей. *Функц. анализ и его прилож.*, 1982, **16**(4), 59–60.

[3] Ichikawa F. Finitely determined singularities of formal vector fields. *Invent. Math.*, 1982, **66**(2), 199–214.

[4] Богданов Р. И. Симплектическая орбитальная эквивалентность векторных полей на плоскости (элементарные особые точки). В кн.: Математика и моделирование. Пущино: ОНТИ НЦБИ, 1990, 32–45.

Р. И. Богданов

1983

1983-3

Относящаяся к *симплектической топологии* теория Конли–Цендера — это теория неподвижных точек симплектоморфизмов, сохраняющих центр тяжести. Напомним, что симплектоморфизм F симплектического многообразия M называется *сохраняющим центр тяжести* (или *гомологичным тождественному*), если $F = g_0^1$, где g_0^t — преобразования фазового потока за время от 0 до t некоторого (неавтономного) гамильтонова векторного поля на M. Согласно теории Конли–Цендера, для многих классов компактных симплектических многообразий M любой симплектоморфизм $F\colon M \to M$, сохраняющий центр тяжести, имеет по меньшей мере столько неподвижных точек, сколько критических точек имеет гладкая функция на M (где под числом неподвижных точек может пониматься как число геометрически различных неподвижных точек, так и число неподвижных точек с учетом кратностей). В основополагающей работе Ч. Конли и Э. Цендера [1] было показано, что число геометрически различных неподвижных точек сохраняющего центр тяжести симплектоморфизма $2n$-мерного тора со стандартной симплектической структурой не меньше $2n+1$, а если все неподвижные точки невырождены, то их не меньше 4^n (на самом деле справедливо чуть более сильное утверждение: в любом случае число неподвижных точек с учетом кратностей не меньше 4^n). Этот и другие результаты теории Конли–Цендера обсуждаются, например, в работах В. И. Арнольда [2–4] (ср. также, например, задачи *1965-1*, *1965-2*, *1966-4*, *1970-10*, *1972-17*, *1972-18*, *1972-33* и *1976-39*).

Утверждения о неподвижных точках симплектоморфизмов, сохраняющих центр тяжести, были вначале сформулированы В. И. Арнольдом в виде гипотез в серии работ, начиная с 1965 г. (см. библиографию в статье [2]). Элементарное введение в проблему дано в книге [5].

Последующие результаты теории Конли–Цендера описаны, например, в книгах [6–7].

С другой стороны, хорошо известно, что многие теоремы, относящиеся к автономным гамильтоновым потокам или симплектоморфизмам, сохраняющим центр тяжести, переносятся соответственно на обратимые потоки и обратимые диффеоморфизмы (отметим, что обратимые аналоги автономных локально гамильтоновых потоков и симплектоморфизмов, не сохраняющих центр тяжести, неизвестны). Наиболее ярким примером гамильтоново-обратимого параллелизма является существование обратимой теории КАМ, во многом похожей на гамильтонову. В статье [8] перечислено 7 пар параллельных гамильтоновых и обратимых теорий. В работах [9–12] даны подробные обзоры современного состояния теории обратимых систем и приведена обширная библиография. В. И. Арнольдом была поставлена (до сих пор нерешенная) задача построения единой «супертеории», четная составляющая которой соответствовала бы обратимости, а нечетная — гамильтоновости, см. [13] (p. 297) и задачу *1984-23*.

В то же время обратимые аналоги теории Конли–Цендера (вопрос о таких аналогах был поставлен В. И. Арнольдом в статье [14], см. также [13], p. 294–295) автору настоящего комментария неизвестны, и мы сейчас приведем нскоторые эвристические соображения, наводящие на мысль, что таких аналогов вообще не существует (и одновременно объясняющие, почему ситуация с теорией КАМ гораздо более благоприятна). Рассмотрим симплектическое многообразие

$$M = \mathbb{T}^{2n}_{\varphi} \times \mathbb{T}^{s}_{\psi} \times \mathbb{R}^{2m}_{x} \times \mathbb{R}^{s}_{y}$$

(нижний индекс при каждом факторе показывает, какой буквой обозначается координата на этом факторе) со стандартной симплектической структурой

$$\omega^2 = \sum_{i=1}^{n} d\varphi_{2i-1} \wedge d\varphi_{2i} + \sum_{j=1}^{m} dx_{2j-1} \wedge dx_{2j} + \sum_{k=1}^{s} dy_k \wedge d\psi_k$$

(здесь $\mathbb{T}^N = \mathbb{R}^N/2\pi\mathbb{Z}^N$). Легко проверить, что симплектоморфизм сдвига

$$F\colon M \to M, \qquad F\colon (\varphi, \psi, x, y) \mapsto (\varphi + a, \psi + \alpha, x + b, y + \beta)$$

сохраняет центр тяжести тогда и только тогда, когда $a \equiv 0 \ (\mathrm{modd}\ 2\pi)$ и $\beta = 0$.

Условие $a \equiv 0 \ (\mathrm{modd}\, 2\pi)$ есть *conditio sine qua non* теории Конли–Цендера: сдвиг тора $\mathbb{T}^{2n}$, не являющийся тождественным, не имеет неподвижных точек. Условие $\beta = 0$ является эвристической «предпосылкой» теории КАМ для сохраняющих центр тяжести симплектоморфизмов, так как оно исключает систематический дрейф вдоль «переменных действия» y_k.

Теперь рассмотрим многообразие

$$\widetilde{M} = \mathbb{T}^{N}_{\chi} \times \mathbb{T}^{n}_{\varphi} \times \mathbb{T}^{\nu}_{\psi} \times \mathbb{R}^{m}_{x} \times \mathbb{R}^{\mu}_{y},$$

на котором действует инволюция

$$G\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}, \qquad G\colon (\chi, \varphi, \psi, x, y) \mapsto (\chi + \Pi_N, -\varphi, \psi, -x, y),$$

где $\Pi_N = (\pi, \ldots, \pi) \in \mathbb{R}^N$. Легко проверить, что диффеоморфизм сдвига

$$\widetilde{F}\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}, \qquad \widetilde{F}\colon (\chi, \varphi, \psi, x, y) \mapsto (\chi + A, \varphi + a, \psi + \alpha, x + b, y + \beta)$$

обратим относительно инволюции G тогда и только тогда, когда $A \equiv 0$ $(\operatorname{modd} \pi)$, $\alpha \equiv 0$ $(\operatorname{modd} \pi)$ и $\beta = 0$.

Условие $\beta = 0$ по-прежнему является эвристической «предпосылкой» теории КАМ (для обратимых диффеоморфизмов). Однако вектор a в случае обратимости $\widetilde{F}$ может быть произвольным, а вектора A и α равны нулю всего лишь $\operatorname{modd} \pi$ (а не $\operatorname{modd} 2\pi$). Таким образом, диффеоморфизм тора, обратимый относительно инволюции этого тора, может вообще не иметь неподвижных точек.

В обратимом случае удается построить теорию неподвижных точек не диффеоморфизмов, обратимых относительно какой-либо нетривиальной инволюции, а *самих инволюций* (конечно, инволюции суть в точности отображения, обратимые относительно тождественного преобразования, но в общей теории обратимых систем такой пример обратимых отображений рассматривается как тривиальный). Многочисленные результаты о множествах неподвижных точек инволюций (как компактных, так и некомпактных многообразий) и обширная библиография приведены в книгах [15–17]. В статье [18] доказана следующая теорема о неподвижных точках инволюций тора, сильно напоминающая теорему Конли–Цендера о неподвижных точках симплектоморфизмов тора, сохраняющих центр тяжести: *если все неподвижные точки непрерывной инволюции N-мерного тора изолированы, то их либо нет, либо ровно 2^N.*

Примером инволюции тора $\mathbb{T}^N_\varphi$ без неподвижных точек является инволюция $\varphi \mapsto \varphi + \Pi_N$, а с 2^N изолированными неподвижными точками — инволюция $\varphi \mapsto -\varphi$.

Аналогичная теорема справедлива для неподвижных точек инволюций сферы: *если все неподвижные точки непрерывной инволюции N-мерной сферы изолированы, то их либо нет, либо ровно* 2 (это очень частный случай теоремы III.7.11, с. 146–147, из книги [16]).

Примером инволюции сферы S^N без неподвижных точек является антиподальная инволюция, а с 2 изолированными неподвижными точками — отражение $(x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}) \mapsto (-x_1, \ldots, -x_N, x_{N+1})$ для стандартного вложения S^N в $\mathbb{R}^{N+1}_x$.

Однако в общем случае утверждение, что если все неподвижные точки непрерывной инволюции компактного многообразия M изолированы, то их либо нет, либо ровно (или хотя бы не меньше) $B(M)$, где $B(M)$ — сумма чисел Бетти M, неверно. Например, для любого $g \geqslant 0$ легко построить инволюцию поверхности M_g рода g с 2 изолированными неподвижными точками, если g четно, и с 4 изолированными неподвижными точками, если g нечетно. Для этого достаточно рассмотреть вложение M_g в $\mathbb{R}^3$, симметричное относительно некоторой прямой l, пересекающей M_g в 2 (соответственно в 4) точках. Искомой инволюцией является отражение относительно l.

Отметим, что при любом $g \geqslant 0$ на M_g существует и инволюция с $2g + 2 = B(M_g)$ изолированными неподвижными точками. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть вложение M_g в $\mathbb{R}^3$, симметричное относительно некоторой прямой l, пересекающей M_g в $2g + 2$ точках.

[1] Conley C. C., Zehnder E. The Birkhoff–Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnol′d. *Invent. Math.*, 1983, **73**(1), 33–49.

[2] Арнольд В. И. Первые шаги симплектической топологии. *Успехи матем. наук*, 1986, **41**(6), 3–18. [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 365–389.]

[3] Arnol′d V. I. First steps of symplectic topology. In: VIIIth Intern. Congress on Mathematical Physics (Marseille, 1986). Editors: M. Mebkhout and R. Sénéor. Singapore: World Scientific, 1987, 1–16.

[4] Arnol′d V. I. On some problems in symplectic topology. In: Topology and Geometry. Rohlin Seminar. Editor: O. Ya. Viro. Berlin: Springer, 1988, 1–5. (Lecture Notes in Math., 1346.) [*Перевод на русский язык в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 425–429.]

[5] Арнольд В. И. Математические методы классической механики, изд. 3-е. М.: Наука, 1989, Добавление 9.

[6] Hofer H., Zehnder E. Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics. Basel: Birkhäuser, 1994, Chapter 6. [*Перевод на русский язык* готовится в изд-ве ФАЗИС.]

[7] McDuff D., Salamon D. Introduction to Symplectic Topology. New York: Clarendon Press, Oxford Univ. Press, 1995, Chapter 11. [*Перевод на русский язык* готовится в изд-ве ФАЗИС.]

[8] Sevryuk M. B. Lower-dimensional tori in reversible systems. *Chaos*, 1991, **1**(2), 160–167.

[9] Roberts J. A. G., Quispel G. R. W. Chaos and time-reversal symmetry. Order and chaos in reversible dynamical systems. *Phys. Rep.*, 1992, **216**(2–3), 63–177.

[10] Lamb J. S. W. Reversing symmetries in dynamical systems. PhD Thesis, University of Amsterdam, 1994.

[11] Roberts J. A. G. Some characterisations of low-dimensional dynamical systems with time-reversal symmetry. In: Control and Chaos. Editors: K. Judd, A. Mees, K. L. Teo and T. L. Vincent. Boston, MA: Birkhäuser, 1997, 106–133. (Math. Model., 8.)

[12] Lamb J. S. W., Roberts J. A. G. Time-reversal symmetry in dynamical systems: a survey. *Physica D*, 1998, **112**(1–2), 1–39.

[13] Sevryuk M. B. Reversible Systems. Berlin: Springer, 1986. (Lecture Notes in Math., 1211.)

[14] Arnol′d V. I. Reversible systems. In: Nonlinear and Turbulent Processes in Physics (Kiev, 1983), V. 3. Editor: R. Z. Sagdeev. Chur: Harwood Acad. Publ., 1984, 1161–1174. [*Перевод на русский язык*: Арнольд В. И. Обратимые системы. В кн.: Проблемы нелинейных и турбулентных процессов в физике. Часть 2. Под ред. А. С. Давыдова и В. М. Черноусенко. Киев: Наукова думка, 1985, 15–21.] [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 355–363.]

[15] Коннер П., Флойд Э. Гладкие периодические отображения. М.: Мир, 1969. [*Английский оригинал* 1964 г.]

[16] Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. М.: Наука, 1980. [*Английский оригинал* 1972 г.]

[17] Conner P. E. Differentiable Periodic Maps. Berlin: Springer, 1979. (Lecture Notes in Math., 738.)

[18] Montaldi J. Caustics in time reversible Hamiltonian systems. In: Singularity Theory and its Applications, Part II. Editors: M. Roberts and I. Stewart. Berlin: Springer, 1991, 266–277. (Lecture Notes in Math., 1463.)

М. Б. Севрюк

1983-5

По поводу этой задачи см. статью [1].

[1] Durfee A., Kronenfeld N., Munson H., Roy J., Westby I. Counting critical points of real polynomials in two variables. *Amer. Math. Monthly*, 1993, **100**(3), 255–271.

С. В. Чмутов

1983-7

Задача решена в 1985 г. независимо М. В. Якобсоном [1] и М. Р. Эрманом [2].

В [1–2] доказано, что диффеоморфизм окружности, заданный тригонометрическим многочленом степени $n > 0$, может иметь не более $2n$ периодических траекторий, и эта оценка точна. Доказательство состоит в продолжении диффеоморфизма до голоморфного отображения $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ и использовании теории итераций голоморфных отображений. Оно обобщается и дает аналогичный результат для диффеоморфизмов, заданных тригонометрически-рационально. (Этот общий результат явно не сформулирован в [1]. В то же время доказательство, приведенное в [1] для тригонометрических многочленов, проходит и в этом общем случае без изменений.) Аналогично доказывается, что если $z \mapsto R(z)$ — рациональное отображение степени d, ограничение которого на некоторую окружность (прямую) является диффеоморфизмом, то число циклов на ней не превосходит $2d - 2$, если диффеоморфизм сохраняет ориентацию окружности, и не превосходит $2d-1$, если обращает [1]. Не известно, точны ли эти оценки. Если же гладкое отображение окружности на себя не является гомеоморфизмом, то число его периодических орбит длины n растет как e^{nh}, где h — топологическая энтропия отображения [1].

[1] Якобсон М. В. О числе периодических траекторий для аналитических диффеоморфизмов окружности. *Функц. анализ и его прилож.*, 1985, **19**(1), 91–92.

[2] Herman M. R. Majoration du nombre de cycles périodiques pour certaines familles de difféomorphismes du cercle. *An. Acad. Brasil. Ciênc.*, 1985, **57**(3), 261–263.

А. А. Глуцюк

1984

1984-1

В работах [1–2] изучены особенности границы пространства чебышевских систем функций (неосцилляционных линейных уравнений), заданных на $[0;1]$, внутри пространства всех линейных уравнений данной степени.

Доказано, что список этих особенностей, встречающихся в типичных семействах с некоторым числом параметров, совпадает со списком особенностей типичных сечений шлейфа с тем же числом параметров. *Шлейф* — это гиперповерхность в пространстве полных вещественных флагов, состоящая из флагов, нетрансверсальных некоторому фиксированному флагу.

[1] Шапиро Б. З. Линейные дифференциальные уравнения и вещественные многообразия флагов. *Функц. анализ и его прилож.*, 1989, **23**(1), 92–93.

[2] Шапиро Б. З. Пространства линейных дифференциальных уравнений и многообразия флагов. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 1990, **54**(1), 173–187.

Б. З. Шапиро

1984-5

Легко проверить, что

$$a_0 = \frac{(2^{2/3} - 1)^{3/2}}{2} = 0{,}225098\ldots$$

При этом точка кубического касания параболы с окружностью есть $\left(\sqrt{1 - 2^{-2/3}}, 2^{-1/3}\right)$.

1984-8

Задача не решена. Аксиоматического определения кососимметрических групп монодромий простых особенностей *нет*. Однако имеется классификация групп, порожденных кососимметрическими трансвекциями, включающая в себя группы монодромий *всех* особенностей. Эта классификация получена в работах Янсена [1], основанных на предшествующих работах [2–3].

Недавно развитая в статьях [1–3] теория была применена к задаче о подсчете числа компонент пересечения двух клеток Шуберта [4].

[1] Janssen W. A. M. Skew-symmetric vanishing lattices and their monodromy groups. I and II. *Math. Ann.*, 1983, **266**(1), 115–133; 1985, **272**(1), 17–22.

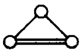
[2] Chmutov S. V. Monodromy groups of critical points of functions. I and II. *Invent. Math.*, 1982, **67**(1), 123–131; 1983, **73**(3), 491–510.

[3] Wajnryb B. On the monodromy group of plane curve singularities. *Math. Ann.*, 1979/80, **246**(2), 141–154.

[4] Shapiro B. Z., Shapiro M. Z., Vainshtein A. D. Connected components in the intersection of two open opposite Schubert cells in $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathcal{B}$. *Internat. Math. Res. Notices*, 1997, **10**, 469–493.

С. В. Чмутов

1984-9

Ответ на вопрос задачи отрицателен. Если в каком-то базисе диаграмма Дынкина содержит фрагмент  (а это так для любой непростой особенности), то уже последовательными отражениями в этих вершинах можно получить диаграммы с ребрами любой кратности. Кажется, на это указал А. М. Габриэлов уже на том заседании семинара, на котором задача была поставлена.

В. А. Васильев

1984-11

См. комментарий к задаче *1973-15*.

1984-12

Частичные результаты получены в работе [1], см. также книгу [2].

[1] Khesin B. A. Ergodic interpretation of integral hydrodynamic invariants. *J. Geom. Phys.*, 1992, **9**(1), 101–110.

[2] Arnol′d V. I., Khesin B. A. Topological Methods in Hydrodynamics. New York: Springer, 1998. (Appl. Math. Sci., 125.) [*Перевод на русский язык*: Арнольд В. И., Хесин Б. А. Топологические методы в гидродинамике. М.: ФАЗИС, готовится к изданию.]

Б. А. Хесин

1984-15

См. комментарии к задачам *1972-27*, *1993-27* и *1998-9*.

1984-16

Важнейшие результаты в этом направлении (в том числе и в многомерном случае, причем как для дифференциальных уравнений на торе, так и для диффеоморфизмов тора) получены О. Г. Галкиным в серии работ [2–7], указанных в комментарии к задаче *1982-5*.

М. Б. Севрюк

1984-17

См. комментарий к задаче *1981-4*.

1984-22

Конечно ли число различных локальных бифуркаций градиентных систем, зависящих от четырех параметров, до сих пор неизвестно. Трехпараметрический случай (где возможны 7 общих принципиально различных бифуркаций) описан, например, в работах [1–2], см. также предшествующую статью [3].

[1] Vegter G. Bifurcations of gradient vector fields. PhD Thesis, University of Groningen, 1983.

[2] Хесин Б. А. Бифуркации градиентных динамических систем. В кн: Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, т. 33. М.: ВИНИТИ, 1988, 113–155.

[3] Vegter G. Bifurcations of gradient vectorfields. In: Bifurcation, Théorie Ergodique et Applications (Dijon, 1981). *Astérisque*, 1982, **98–99**, 39–73.

Б. А. Хесин

1984-23

См. комментарий к задаче *1983-3*.

1985

1985-4, а также *1987-1* и *1990-10*

См. обсуждение результатов В. В. Фока (в частности, об универсальной форме erf), а также комментарии М. А. Шубина и C. King'а по поводу асимптотик собственных чисел и функций в книге [1] (гл. V, замечание 3.14).

[1] Arnol′d V. I., Khesin B. A. Topological Methods in Hydrodynamics. New York: Springer, 1998. (Appl. Math. Sci., 125.) [*Перевод на русский язык*: Арнольд В. И., Хесин Б. А. Топологические методы в гидродинамике. М.: ФАЗИС, готовится к изданию.]

Б. А. Хесин

1985-5

Возможно, эта задача полностью решена с помощью новых контактных гомологий Элиашберга–Хофера.

E. Ferrand

1985-6

Ср. задачу *1979-19.*

1985-7

1. Для каждого n группы когомологий дополнений к бифуркационным диаграммам нулей (= дискриминантам) особенностей функций в $\mathbb{C}^n$ стабилизируются к конечно порожденным в каждой размерности (при $n = 1$ см. В. И. Арнольд [1]; для любого n — В. А. Васильев [2]).

2. Именно, кольцо этих когомологий изоморфно $H^*(\Omega^{2n}S^{2n+1})$ (Васильев [3], см. также [4]).

3. Аналогичные утверждения верны для когомологий дополнений к каустикам, предельное кольцо изоморфно $H^*(\Omega^{2n}\Sigma^{2n}\Lambda(n))$, где

$\Lambda(n) = \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$ — лагранжев грассманиан (см. там же). Эти изоморфизмы задаются струйными вложениями («h-принцип» Смейла–Хирша).

4. Аналог утверждения 1 верен для дополнений к множеству функций, имеющих особенность любого фиксированного типа. Если коразмерность этого множества больше 1, то это верно и для вещественных особенностей (при $n = 1$ см. [5]; для произвольных n доказательство практически совпадает с комплексной ситуацией).

5. Для особых множеств, определенных в терминах мультиособенностей (бифуркационные диаграммы функций, замыкание страта Максвелла), стабилизация в $\mathbb{C}^1$-ситуации доказана в [6]. Для случая $\mathbb{C}^n$ (а если мультиособые функции имеют коразмерность $\geqslant 2$ — то и в $\mathbb{R}^n$) доказательство практически то же самое.

6. Для дополнений ко всей бифуркационной диаграмме (нулей или функций) особенностей в $\mathbb{R}^n$ аналогичное утверждение неверно: уже число компонент дополнения растет неограниченно с усложнением особенностей.

7. Для примыканий стратов особенностей и мультиособенностей функций в $\mathbb{C}^n$ имеются теоремы о стабильной неприводимости: для любого класса особенностей или мультиособенностей (конечной коразмерности) найдется настолько сложная изолированная особенность, что в ее дискриминанте соответствующий страт представлен единственной компонентой [2]. Точно то же доказательство проходит в вещественном случае. При этом предполагается, конечно, что класс (мульти)особенностей определяется при помощи неприводимого подмножества в пространстве (мульти)струй.

[1] Арнольд В. И. О некоторых топологических инвариантах алгебраических функций. I. *Труды Моск. матем. об-ва*, 1970, **21**, 27–46.

[2] Васильев В. А. Стабильные когомологии дополнений к дискриминантам деформаций особенностей гладких функций. В кн: Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, т. 33. М.: ВИНИТИ, 1988, 3–29.

[3] Vassiliev V. A. Topology of complements to discriminants and loop spaces. In: Theory of Singularities and its Applications. Editor: V. I. Arnol′d. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990, 9–21. (Advances in Soviet Math., 1.)

[4] Васильев В. А. Топология дополнений к дискриминантам. М.: ФАЗИС, 1997.

[5] Арнольд В. И. Пространства функций с умеренными особенностями. *Функц. анализ и его прилож.*, 1989, **23**(3), 1–10. [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 455–469.]

[6] Некрасов Н. А. О когомологиях дополнения к бифуркационной диаграмме функций особенности A_μ. *Функц. анализ и его прилож.*, 1993, **27**(4), 24–31.

В. А. Васильев

1985-10

В [1] доказано, что изолированные стабильные гиперболические особенности функций n переменных стабильно эквивалентны эллиптическим особенностям функций $n-1$ переменной.

[1] Вайнштейн А. Д., Шапиро Б. З. Особенности границы области гиперболичности. В кн.: Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, т. 33. М.: ВИНИТИ, 1988, 193–214.

Б. З. Шапиро

1985-11

Поскольку обычная ориентируемость — это условие $w_1 = 0$, ее комплексификацией, вероятно, следует считать условие $c_1 = 0$. Конечно, наличие спинорной структуры (т. е. условие $w_2 = 0$) следует из последнего, но не обратно.

См. также комментарии к задаче *1979-4*.

В. А. Васильев

* * *

1985-11

Связь комплексификации понятия ориентации, указанной в моем комментарии к задаче *1979-4*, со спинорными структурами неясна.

Б. А. Хесин

1985-17

Неизвестно.

С. М. Гусейн-Заде

1985-20

Для малых степеней классификация получена В. М. Харламовым. Особенности границы невырожденных однородных векторных полей — это зонтики Уитни, см. [1].

[1] Хесин Б. А. Однородные векторные поля и зонтики Уитни. *Успехи матем. наук*, 1987, **42**(5), 217–218.

Б. А. Хесин

1985-22, а также *1998-8*

В комплексном случае имеет место стабилизация колец когомологий в следующем смысле: $\exists$ «стабильные» градуированные кольца $M(n)$ и $M = M(\infty)$ такие, что

а) $\forall n$, $\forall$ изолированной особенности f от n переменных и $\forall k$ найдется такая особенность g, более сложная, чем f (примыкающая), что кольцо когомологий дополнения до страта Максвелла версальной деформации g естественно изоморфно $M(n)$ до размерности k;

б) $\forall$ изолированной особенности f и $\forall k$ найдется такая особенность g от не меньшего числа переменных, более сложная, чем подходящая стабилизация f, что кольцо когомологий дополнения до страта Максвелла g изоморфно M до размерности k.

С абстрактным определением и существованием стабильных колец $M(n)$ и M (как индуктивных пределов аналогичных колец для индивидуальных особенностей) проблем нет, но из утверждений а), б) вытекает, в частности, их конечная порожденность в любой размерности.

Доказательство при $n = 1$ получается некоторым упрощением работы [1]. Для произвольного n доказательство почти такое же, с использованием дополнительно теоремы 1 из § 5.2 гл. IV в [2].

Не утверждается (и, вероятно, неверно), что для любой последовательности примыкающих особенностей с бесконечно растущим числом Милнора предел колец когомологий по этой последовательности совпадает с $M(n)$ или M.

Для вещественных особенностей при буквальном прочтении вопроса задачи ответ отрицательный (уже число компонент дополнения до страта Максвелла растет неограниченно) и, вероятно, отрицателен при любой интересной постановке (например, в ограничении на отдельные компоненты). Однако если запретить не весь страт Максвелла, а его естественный подстрат положительной коразмерности (например, замыкание множества функций с m точками на одном уровне, $m \geqslant 3$), то будут верны точно такие же теоремы стабилизации (а при $m \geqslant 4$ и аналогичные теоремы о стабилизации гомотопических групп).

[1] Некрасов Н. А. О когомологиях дополнения к бифуркационной диаграмме функций особенности A_μ. *Функц. анализ и его прилож.*, 1993, **27**(4), 24–31.

[2] Васильев В. А. Топология дополнений к дискриминантам. М.: ФАЗИС, 1997.

В. А. Васильев

* * *

1985-22, а также *1998-8*

Рассмотрим миниверсальную деформацию $F_\lambda(x) = x^{k+1} + \lambda_1 x^{k-1} + \cdots + \lambda_{k-1} x$ особенности A_k, где $x \in \mathbb{C}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Кольцо когомологий дополнения к страту Максвелла (соответственно к бифуркационной диаграмме) в пространстве параметров λ стабилизируется при $k \to \infty$ (Н. А. Некрасов [1]). Аналогичная стабилизация имеет место и для когомологий дополнения к страту Максвелла (соответственно к бифуркационной диаграмме) комплексных *бимногочленов*, определенных В. И. Арнольдом [2] (Ф. Наполитано [3]). Группы когомологий дополнения к страту Максвелла неизвестны даже для обычных многочленов. Группы когомологий дополнений к любому страту дискриминанта для особенностей A_k описаны в [4–5]: когомологии дополнения к любому страту стабилизируются при $\mu \to \infty$.

[1] Некрасов Н. А. О когомологиях дополнения к бифуркационной диаграмме функций особенности A_μ. *Функц. анализ и его прилож.*, 1993, **27**(4), 24–31.

[2] Арнольд В. И. Топологическая классификация комплексных тригонометрических многочленов и комбинаторика графов с одинаковым числом вершин и ребер. *Функц. анализ и его прилож.*, 1996, **30**(1), 1–17.

[3] Napolitano F. Discriminant and bifurcation diagram of complex trigonometric polynomials. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1998, **327**(8), 771–776.

[4] Арнольд В. И. О некоторых топологических инвариантах алгебраических функций. I. *Труды Моск. матем. об-ва*, 1970, **21**, 27–46.

[5] Napolitano F. Topology of complements of strata of the discriminant of polynomials. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1998, **327**(7), 665–670.

F. Napolitano

1985-24

См. комментарий к задаче *1993-24*. Ср. также задачу *1996-4*.

1985-26

Доказательство гипотезы Болла было дано В. П. Костовым в статье [1].

[1] Kostov V. P. On the geometric properties of Vandermonde's mapping and on the problem of moments. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A*, 1989, **112**(3–4), 203–211.

М. Б. Севрюк

1986

1986-1

Задача до сих пор открыта, обзор известных результатов приведен в статье [1].

[1] Viterbo C. Properties of embedded Lagrange manifolds. In: First European Congress of Mathematics (Paris, July 6–10, 1992), Vol. II. Invited lectures, Part 2. Editors: A. Joseph, F. Mignot, F. Murat, B. Prum and R. Rentschler. Basel: Birkhäuser, 1994, 463–474. (Progr. Math., 120.)

E. Ferrand

1986-4

Пусть X — гамильтонова или обратимая автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^{2N}$ $(N \geqslant 1)$ с положением равновесия 0 (в обратимом случае предполагается еще, что точка 0 инвариантна относительно обращающей инволюции G).

Теорема 1. *Пусть линеаризация D_0X системы X в 0 имеет пару простых чисто мнимых собственных чисел $\pm i\omega$ $(\omega > 0)$, а остальные собственные числа $\pm\lambda_2, \dots, \pm\lambda_N$ удовлетворяют следующему* условию нерезонансности:

$$\frac{\lambda_j}{i\omega} \notin \mathbb{Z}, \quad 2 \leqslant j \leqslant N.$$

Тогда через положение равновесия 0 проходит двумерная поверхность M, обладающая следующими свойствами.

1) *Поверхность M имеет ту же гладкость, что и система X (точнее, поверхность M аналитична, принадлежит классу гладкости C^∞ или имеет конечную гладкость в случае аналитической, бесконечно-гладкой или конечно-гладкой системы X соответственно).*

2) *Касательная плоскость к M в 0 есть инвариантная плоскость линейной системы D_0X, соответствующая собственным числам $\pm i\omega$.*

3) *Поверхность $M \setminus \{0\}$ аналитически, C^∞ или конечно-гладко (в зависимости от гладкости системы X) расслоена на замкнутые траектории системы X, период которых близок к $2\pi/\omega$ и стремится к $2\pi/\omega$, когда траектории стягиваются к 0. В обратимом случае эти траектории инвариантны и относительно обращающей инволюции G.*

4) *Если система X зависит от параметров, то поверхность M также зависит от этих параметров с той же гладкостью.*

В гамильтоновом случае эта теорема есть классическая теорема Ляпунова о центре 1892 г. [1] (гл. II, п° 45) — один из основных результатов теории малых колебаний нелинейных гамильтоновых систем. Насколько известно автору настоящего комментария, теорему Ляпунова на обратимые системы впервые перенес Р. Л. Девани [2] в 1976 г., и в обратимом случае теорема 1 обычно называется теоремой Ляпунова–Девани. Впрочем, А. М. Ляпунов еще в 1893 г. [3] (п° 15) указал на то, что положения равновесия типа центра характерны для двух классов автономных систем на плоскости — консервативных и обратимых (тривиальный случай теоремы 1 для $N = 1$). Поверхность M в теореме 1 называется *ляпуновской инвариантной поверхностью.*

Теореме Ляпунова о центре и в меньшей степени теореме Ляпунова–Девани посвящена богатая литература, и к настоящему времени известно довольно много разных доказательств этих результатов. В настоящем комментарии мы ограничимся лишь ссылкой на диссертацию [4], содержащую обширную библиографию.

Рассмотрим теперь однопараметрическое семейство X_ε гамильтоновых или обратимых автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^{2N}$ $(N \geqslant 2)$ с общим положением равновесия 0 (в обратимом случае снова предполагается, что точка 0 инвариантна относительно обращающей инволюции G), $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Пусть при $\varepsilon = 0$ линеаризация D_0X_0 системы X_0 в 0 имеет две резонансные пары чисто мнимых собственных чисел $\pm pi\omega$, $\pm qi\omega$, где $1 \leqslant p \leqslant q$ — взаимно простые натуральные числа и $\omega > 0$, а остальные собственные числа $\pm\lambda_3, \dots, \pm\lambda_N$ удовлетворяют следующему условию:

$$\frac{\lambda_j}{i\omega} \notin \mathbb{Z}, \quad 3 \leqslant j \leqslant N$$

(резонанс $p : q$). Для $p = q = 1$ предполагается дополнительно, что каждому из двукратных собственных чисел $i\omega$ и $-i\omega$ отвечает жорданова клетка порядка 2 (это требование является условием общности положения).

При малых ε система X_ε может иметь вблизи 0 инвариантную двумерную поверхность M_ε, расслоенную на замкнутые траектории (инвариантные относительно обращающей инволюции G в обратимом случае) с периодами, близкими к $2\pi/\omega$. В задаче требуется исследовать перестройки этой поверхности, когда параметр ε проходит через критическое значение 0.

Замечание 1. Резонанс $p : q$ называется *целым* (или *антиляпуновским*) при $p = 1$ и *субгармоническим* при $q > p \geqslant 2$.

Замечание 2. В случае целых резонансов $1 : q$ с $q \geqslant 2$ система X_ε согласно теореме 1 имеет при всех малых ε проходящую через 0 инвариантную двумерную поверхность M'_ε, расслоенную на замкнутые траектории (инвариантные относительно инволюции G в обратимом случае) с периодами, близкими к $2\pi/(q\omega)$. Эта поверхность гладко или аналитически зависит от ε и не бифурцирует, когда параметр ε проходит через критическое значение 0. Замкнутые траектории системы X_ε с периодами, близкими к $2\pi/\omega$ (на эти траектории расслоена поверхность M_ε), и с периодами, близкими к $2\pi/(q\omega)$, называются при этом *долгопериодическими циклами* и *короткопериодическими циклами* соответственно.

В случае субгармонических резонансов $p : q$ система X_ε согласно теореме 1 имеет при всех малых ε проходящие через 0 инвариантные двумерные поверхности M'_ε и M''_ε, расслоенные на замкнутые траектории (инвариантные относительно инволюции G в обратимом случае) с периодами, близкими к $2\pi/(p\omega)$ и $2\pi/(q\omega)$ соответственно. Эти поверхности гладко или аналитически зависят от ε и не бифурцируют, когда параметр ε проходит через критическое значение 0. Замкнутые траектории системы X_ε с периодами, близкими к $2\pi/\omega$ (на эти траектории расслоена поверхность M_ε), с периодами, близкими к $2\pi/(p\omega)$, и с периодами, близкими к $2\pi/(q\omega)$, называются при этом *сверхдолгопериодическими циклами*, *долгопериодическими циклами* и *короткопериодическими циклами* соответственно.

Замечание 3. Перестройка поверхности M_ε для резонанса $1 : 1$ называется *гамильтоновой бифуркацией Хопфа* в гамильтоновом случае и *обратимой бифуркацией Хопфа* в обратимом.[1]

К настоящему времени перестройки поверхности M_ε подробно изучены (и определен тип устойчивости замкнутых траекторий) для всех резонансов как в гамильтоновом, так и в обратимом случае. В гамильтоновом случае для всех резонансов $p : q$, кроме резонанса $1 : 1$, найдены нормальные формы и версальные деформации поверхности M_0 [6].

---

[1] Более правильно было бы говорить о гамильтоновой или обратимой бифуркации Пуанкаре–Андронова — по аналогии с обычной «бифуркацией Хопфа», см. [5] (§ 33, А–В).

Размерность базы версальной деформации равна 1 для $p = 1$, $q = 2$, равна 2 для $p + q \geqslant 5$ и равна 3 для $p = 1$, $q = 3$. В обратимом случае для всех резонансов найдены нормальные формы семейства кривых Γ_ε — пересечений поверхностей M_ε с N-мерным многообразием неподвижных точек обращающей инволюции G.[2] Соответствующие ссылки как для гамильтонова, так и для обратимого случаев приведены, например, в диссертации [4], более подробная библиография для резонанса $1 : 1$ указана, например, в статье [7].

Важнейшие ссылки мы дадим здесь. Наиболее полная информация о перестройках поверхности M_ε в гамильтоновом случае для всех резонансов $p : q$, кроме резонанса $1 : 1$, содержится в работе [6]. Из предшествующих работ отметим статьи [8–9]. Гамильтонова бифуркация Хопфа подробно исследована, например, в работах [10–11].[3] Все резонансы в гамильтоновом случае рассмотрены с единой точки зрения в книге [14] (глава 7, § 3). В обратимом случае основными работами по перестройкам поверхности M_ε для всех резонансов являются статья [15] (§§ 2.14–2.16), книга [16] (Ch. 6) и диссертация [4].

Оказывается, что общая картина перестроек поверхности M_ε при прохождении любого резонанса в гамильтоновом и в обратимом случаях почти одинакова — одно из проявлений общего феномена параллелизма гамильтоновой и обратимой динамики (см. комментарий к задаче *1983-3*). При выполнении некоторых условий невырожденности для каждого резонанса встречаются лишь два существенно различных типа перестройки поверхности M_ε, называемых *эллиптическим режимом* и *гиперболическим режимом*. Условия невырожденности накладываются на производную $\frac{d}{d\varepsilon}D_0X_\varepsilon\big|_{\varepsilon=0}$ и на k-струю системы X_0 в точке 0, где $k = 3$ для резонанса $1 : 1$ и субгармонических резонансов и $k = q$ для резонансов $1 : q$ с $q \geqslant 2$.[4] Режим определяется 3-струей системы X_0 в

---

[2] Замкнутая траектория обратимой системы, инвариантная относительно обращающей инволюции G, содержит ровно две точки, неподвижные относительно G.

[3] В гамильтоновом случае изучен и резонанс $1 : 1$ в вырожденной ситуации, когда двукратные собственные числа $\pm i\omega$ линейной системы D_0X_0 являются полупростыми (им отвечает диагональная матрица $\operatorname{diag}\{i\omega, i\omega, -i\omega, -i\omega,\}$) [12] (см. также анонс [13], вышедший позже самой диссертации [12]).

[4] Для определения типа устойчивости замкнутых траекторий в случае субгармонических резонансов $p : q$ необходимо еще некоторое условие невырожденности на $(p + q - 1)$-струю системы X_0 в точке 0. Все указанные порядки струй системы X_0 в точке 0, на которые накладываются условия невырожденности, были тщательно проверены автором настоящего комментария лишь для обратимого случая.

точке 0 для всех резонансов, кроме резонанса 1 : 2, и s-струей системы X_0 в точке 0 для резонанса 1 : 2, где $s = 1$ в гамильтоновом случае и $s = 2$ в обратимом.

Замечание 4. Важнейшей характеристикой резонансной *гамильтоновой* системы при любом резонансе (кроме резонанса 1 : 1) являются еще знаки резонансных собственных частот, т. е. сигнатура квадратичной части гамильтониана в положении равновесия 0: поведение гамильтоновых систем в знакоопределенном (резонансные собственные частоты одного знака) и индефинитном (резонансные собственные частоты разных знаков) случаях различно. При резонансах $p : q$ с $q \geqslant 3$ в гамильтоновых системах как в знакоопределенном, так и в индефинитном случаях общим образом встречаются оба режима. При резонансе 1 : 2 режим полностью определяется уже квадратичной частью гамильтониана: в знакоопределенном случае режим гиперболический, а в индефинитном — эллиптический.

[1] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. В кн.: Собр. соч., т. II. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1956, 7–263. [*Оригинальная публикация* 1892 г.]

[2] Devaney R. L. Reversible diffeomorphisms and flows. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1976, **218**, 89–113.

[3] Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. В кн.: Собр. соч., т. II. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1956, 272–331. [*Оригинальная публикация* 1893 г.]

[4] Севрюк М. Б. Обратимые динамические системы. Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 1987.

[5] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[6] Duistermaat J. J. Bifurcations of periodic solutions near equilibrium points of Hamiltonian systems. In: Bifurcation Theory and Applications. Editor: L. Salvadori. Berlin: Springer, 1984, 57–105. (Lecture Notes in Math., 1057.)

[7] Lahiri A., Bhowal A., Roy T. K., Sevryuk M. B. Stability of invariant curves in four-dimensional reversible mappings near 1 : 1 resonance. *Physica D*, 1993, **63**(1–2), 99–116.

[8] Henrard J. Periodic orbits emanating from a resonant equilibrium. *Celest. Mech.*, 1970, **1**(3/4), 437–466.

[9] Schmidt D. S. Periodic solutions near a resonant equilibrium of a Hamiltonian system. *Celest. Mech.*, 1974, **9**(1), 81–103.

[10] van der Meer J.-C. The Hamiltonian Hopf Bifurcation. Berlin: Springer, 1985. (Lecture Notes in Math., 1160.)

[11] van der Meer J.-C. Bifurcation at nonsemisimple 1 : −1 resonance. *Z. Angew. Math. Phys.*, 1986, **37**(3), 425–437.

[12] Cotter C. The 1 : 1 semisimple resonance. PhD thesis, University of California at Santa Cruz, 1986.

[13] Cotter C. Bifurcations of Hamiltonian periodic orbits near an equilibrium in 1 : 1 resonance. *Abstracts of Papers Presented to the AMS*, 1987 (issue 53), **8**(6), 394–395.

[14] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 3 (Динамические системы–3). М.: ВИНИТИ, 1985.

[15] Arnol′d V. I., Sevryuk M. B. Oscillations and bifurcations in reversible systems. In: Nonlinear Phenomena in Plasma Physics and Hydrodynamics. Editor: R. Z. Sagdeev. Moscow: Mir, 1986, 31–64.

[16] Sevryuk M. B. Reversible Systems. Berlin: Springer, 1986. (Lecture Notes in Math., 1211.)

М. Б. Севрюк

1986-6

Я. М. Элиашберг и T. Ratiu [1–2] доказали, что диаметр группы симплектоморфизмов четномерного шара бесконечен (см. также обзор результатов в книге [3]).

[1] Eliashberg Ya. M., Ratiu T. On the diameter of the symplectomorphism group of the ball. In: Symplectic Geometry, Groupoids, and Integrable Systems (Berkeley, 1989). Editors: P. Dazord and A. Weinstein. New York: Springer, 1991, 169–172. (Math. Sci. Res. Inst. Publ., 20.)

[2] Eliashberg Ya. M., Ratiu T. The diameter of the symplectomorphism group is infinite. *Invent. Math.*, 1991, **103**(2), 327–340.

[3] Arnol′d V. I., Khesin B. A. Topological Methods in Hydrodynamics. New York: Springer, 1998. (Appl. Math. Sci., 125.) [*Перевод на русский язык*: Арнольд В. И., Хесин Б. А. Топологические методы в гидродинамике. М.: ФАЗИС, готовится к изданию.]

Б. А. Хесин

1986-7, а также *1989-18*

Точная асимптотика неизвестна (имеются неподтвержденные сведения, что ее получил G. Kuperberg). Хорошая верхняя оценка найдена в [1–2]. Исходная работа — [3].

[1] Lando S. K., Zvonkin A. K. Meanders. *Selecta Math. Sov.*, 1992, **11**(2), 117–144.

[2] Lando S. K., Zvonkin A. K. Plane and projective meanders. *Theor. Comp. Sci.*, 1993, **117**(1–2), 227–241.

[3] Арнольд В. И. Разветвленное накрытие $\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \to S^4$, гиперболичность и проективная топология. *Сиб. матем. ж.*, 1988, **29**(5), 36–47. [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 431–448.]

С. К. Ландо

1986-8

Пусть M — гладкая замкнутая выпуклая гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ — линейное проектирование. Образ $\pi(M)$ гиперповерхности M называется ее *тенью*. Граница тени называется *видимым контуром* (гиперповерхности M).

Если вторая квадратичная форма гиперповерхности M положительно определена, то ее видимый контур гладкий. В противном случае видимый контур может не быть гладким (за исключением тривиального случая $n = 1$).

Теорема [1]. *Пусть M — гладкая замкнутая выпуклая поверхность в $\mathbb{R}^3$. Тогда*

1) *видимый контур поверхности M принадлежит классу D^2 (является дважды дифференцируемой кривой);*

2) *существует поверхность M, видимый контур которой не принадлежит классу C^2 (вторая производная разрывна).*

Если поверхность M вещественно аналитична, то

1) *ее видимый контур принадлежит классу $C^{2+\varepsilon}$ для некоторого $\varepsilon > 0$ (вторая производная удовлетворяет условию Гёльдера с показателем ε);*

2) *для любого нечетного целого $q \geqslant 3$ существует поверхность M, видимый контур которой в точности принадлежит классу $C^{2+2/q}$.*

Теорема [2]. *Пусть M — гладкая замкнутая выпуклая гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, где $n \geqslant 3$. Тогда*

1) *видимый контур гиперповерхности M принадлежит классу C^{1+1} (первая производная непрерывна по Липшицу);*

2) *существует гиперповерхность M, видимый контур которой не принадлежит классу D^2.*

В аналитическом случае, по всей видимости, верна следующая

Гипотеза. *Видимый контур вещественно аналитической гладкой замкнутой выпуклой гиперповерхности в $\mathbb{R}^{n+1}$, где $n \geqslant 3$, принадлежит классу D^2.*

Эту гипотезу нельзя улучшить:

Теорема [3]. *Существует вещественно аналитическая гладкая замкнутая выпуклая гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, где $n \geqslant 3$, видимый контур которой не принадлежит классу C^2.*

В функциональном пространстве всех замкнутых гиперповерхностей, диффеоморфных данной, гиперповерхности с положительно определенной второй квадратичной формой образуют открытое в C^∞-топологии множество $\mathcal{U}$. Их видимые контуры гладкие. На границе $\mathcal{U}$ лежат выпуклые гиперповерхности, видимые контуры которых уже могут и не быть гладкими. Рассмотрим теперь *общие* m-параметрические семейства гладких гиперповерхностей в $\mathbb{R}^{n+1}$ (т. е. принадлежащие некоторому открытому всюду плотному в тонкой C^∞-топологии Уитни подмножеству в пространстве всех гладких m-параметрических семейств гиперповерхностей, диффеоморфных данной). В таких семействах могут встречаться выпуклые гиперповерхности, которые, например, при $m = 0$ исчерпываются гиперповерхностями из $\mathcal{U}$. Гиперповерхности же, лежащие на границе $\mathcal{U}$, могут встречаться в общих семействах, если только $m \geqslant 1$.

Теорема [3]. *При любом π видимый контур гладкой выпуклой гиперповерхности в $\mathbb{R}^{n+1}$, лежащей в общем m-параметрическом семействе гиперповерхностей, принадлежит классу $C^{2+2/q(m)}$ при $n = 2$ и D^2 при $n \geqslant 3$ (и даже классу C^∞ при $m = 0$ и любом n). Здесь $q(m) = 2[(m+2)/3] + 1$ и $[\,\cdot\,]$ — целая часть.*

В [3] доказано также, что эти оценки нельзя улучшить. Например, при подходящем π видимый контур типичной выпуклой гиперповерхности, лежащей на границе $\mathcal{U}$ (случай $m = 1$), уже не является гладким. Нормальные формы ростков таких проектирований найдены в [4].

Последняя теорема показывает, что контрпримеры из теорем [1] и [2] имеют бесконечную коразмерность, а гладкости видимых контуров в аналитическом и конечнопараметрическом случаях совпадают.

[1] Kiselman C. O. How smooth is the shadow of a smooth convex body? *J. London Math. Soc., Ser.* 2, 1986, **33**(1), 101–109.

[2] Седых В. Д. Бесконечно гладкая компактная выпуклая гиперповерхность, граница тени которой не дифференцируема дважды. *Функц. анализ и его прилож.*, 1989, **23**(3), 86–87.

[3] Bogaevsky I. A. Degree of smoothness for visible contours of convex hypersurfaces. In: Theory of Singularities and its Applications. Editor: V. I. Arnol′d. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990, 119–127. (Advances in Soviet Math., 1.)

[4] Богаевский И. А. Особенности проектирований выпуклых гиперповерхностей. *Функц. анализ и его прилож.*, 1990, **24**(2), 16–23.

И. А. Богаевский, В. Д. Седых

1986-12, а также *1987-11* и *1994-30*

Численное исследование особенностей экстремалей этой вариационной задачи проведено в работах H. K. Moffatt'а и его школы (см., например, [1–5]). Некоторые запреты на топологию стационарного решения уравнения Эйлера найдены в статье [6], см. также обзор в книге [7].

[1] Moffatt H. K. Some developments in the theory of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 1981, **106**, 27–47.

[2] Moffatt H. K. Magnetostatic equilibria and analogous Euler flows of arbitrarily complex topology. Part 1. Fundamentals. *J. Fluid Mech.*, 1985, **159**, 359–378.

[3] Moffatt H. K. Magnetostatic equilibria and analogous Euler flows of arbitrarily complex topology. Part 2. Stability considerations. *J. Fluid Mech.*, 1986, **166**, 359–378.

[4] Moffatt H. K. Structure and stability of solutions of the Euler equations: a Lagrangian approach. *Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A*, 1990, **333**(1631), 321–342.

[5] Bajer K. Flow kinematics and magnetic equilibria. PhD Thesis, Cambridge University, 1989.

[6] Ginzburg V. L., Khesin B. A. Steady fluid flows and symplectic geometry. *J. Geom. Phys.*, 1994, **14**(2), 195–210.

[7] Arnol′d V. I., Khesin B. A. Topological Methods in Hydrodynamics. New York: Springer, 1998. (Appl. Math. Sci., 125.) [*Перевод на русский язык*: Арнольд В. И., Хесин Б. А. Топологические методы в гидродинамике. М.: ФАЗИС, готовится к изданию.]

Б. А. Хесин

1987

1987-1

См. комментарий к задаче *1985-4*.

1987-6

Эта задача фактически решена В. И. Арнольдом в статье [1]. Там посчитано, что $H_3 = \mathbb{Z}$ и $H_2 = 0$. Поскольку множество $\mathbb{C}^n \setminus \Sigma^{n-2}$ к тому же, очевидно, односвязное, из теоремы Гуревича имеем $\pi_3 = \mathbb{Z}$.

Аналогично, в той же статье для любого $k < n$ доказано, что $H_{2k-1}(\mathbb{C}^n \setminus \Sigma^{n-k}) = \mathbb{Z}$ (и H_i, $i < 2k-1$, тривиальны), откуда следует и равенство $\pi_{2k-1} = \mathbb{Z}$.

[1] Арнольд В. И. О некоторых топологических инвариантах алгебраических функций. I. *Труды Моск. матем. об-ва*, 1970, **21**, 27–46.

В. А. Васильев

1987-7, а также *1990-26*

Топологии дополнения к шлейфу полного флага в $\mathbb{R}^n$ посвящены статьи [1–8].

Исходный вопрос окончательно решен в работах [6, 8]. Ответ следующий:

n	2	3	4	5	6	7
$\#_{\text{компонент}}(n)$	2	6	20	52	$3\cdot 2^5$	$3\cdot 2^6$

и т. д.

Стабильный ответ $\#_{\text{компонент}}(n) = 3 \cdot 2^{n-1}$ верен, начиная с $n = 6$.

Имеется интересная интерпретация задачи о подсчете компонент связности в терминах групп, порожденных отражениями, действующих в векторных пространствах над $\mathbb{F}_2$.

Имеется также непонятная связь групп, порожденных отражениями, появляющимися в этой задаче, с группами, возникающими у Зубера и Варченко – Гусейн-Заде в связи с алгеброй Верлинда, см. [9].

В работах [2–3] приведены примеры многообразий флагов вида $PT^*\mathrm{P}^n$, в которых пересечения любых наборов открытых вещественных клеток Шуберта обладают т. н. M-свойством, т. е. сумма их чисел Бетти с коэффициентами в $\mathbb{F}_2$ такая же, как и у комплексификации.

Работы [1, 4, 7] связаны с изучением E_{pq}-характеристики (à la Хованский–Данилов) для дополнения к шлейфу полного флага в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ и других пересечений клеток Шуберта. Построена определенная стратификация произвольного пересечения пары клеток Шуберта, которая в принципе позволяет получить ответ для любого конкретного пересечения. Однако задача получить общий ответ в замкнутой форме, по-видимому, является безнадежной. С другой стороны, методы работ [6, 8], по всей видимости, позволяют получить информацию не только о числе компонент связности, но и о группах гомологий в малых размерностях для серий пересечений клеток Шуберта.

Отметим, наконец, что E^{pq}-характеристика тесно связана с т. н. R-многочленами в теории Каждана–Люстига структурных констант алгебры Гекке.

[1] Shapiro B. Z., Vainshtein A. D. Euler characteristics for links of Schubert cells in the space of complete flags. In: Theory of Singularities and its Applications. Editor: V. I. Arnol′d. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990, 273–286. (Advances in Soviet Math., 1.)

[2] Костов В. П., Шапиро Б. З. Флаги в $\mathbb{R}^3$, трансверсальные к данным, образуют M-многообразие. *Вестник МГУ, сер.* 1, *матем., механ.*, 1989, № 5, 26–30.

[3] Shapiro B. Z., Shapiro M. Z. The M-property of flag varieties. *Topology Appl.*, 1992, **43**(1), 65–81.

[4] Shapiro B. Z., Shapiro M. Z., Vainshtein A. D. Topology of intersections of Schubert cells and Hecke algebra. *Discrete Math.*, 1996, **153**(1–3), 305–318.

[5] Shapiro B. Z., Shapiro M. Z., Vainshtein A. D. Kazhdan–Lusztig polynomials for certain varieties of incomplete flags. *Discrete Math.*, 1998, **180**(1–3), 345–355.

[6] Shapiro B. Z., Shapiro M. Z., Vainshtein A. D. Connected components in the intersection of two open opposite Schubert cells in $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathcal{B}$. *Internat. Math. Res. Notices*, 1997, **10**, 469–493.

[7] Shapiro B. Z., Shapiro M. Z., Vainshtein A. D. On combinatorics and topology of pairwise intersections of Schubert cells in $\mathrm{SL}_n/\mathcal{B}$. In: Arnol′d–Gel′fand Mathematical Seminars: Geometry and Singularity Theory. Editors: V. I. Arnol′d, I. M. Gel′fand, V. S. Retakh and M. Smirnov. Boston, MA: Birkhäuser, 1997, 397–437.

[8] Shapiro B. Z., Shapiro M. Z., Vainshtein A. D. Skew-symmetric vanishing lattices and intersections of Schubert cells. *Internat. Math. Res. Notices*, 1998, **11**, 563–588.

[9] Gusein-Zade S. M., Varchenko A. N. Verlinde algebras and the intersection form on vanishing cycles. *Selecta Math.* (*N. S.*), 1997, **3**(1), 79–97.

Б. З. Шапиро

1987-10

Представляется верной более сильная гипотеза: число критических точек N-й собственной функции лапласиана в n-мерной области D растет не медленнее, чем $a(D)N^{1/n}$, и не быстрее, чем $b(D)N$ (если критических точек конечное число), $a(D)$, $b(D) > 0$.

Из теоремы Безу следует, что число критических точек, если их конечное число, для собственной функции оператора Лапласа с номером N в $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ и S^n растет не быстрее, чем $n!\,N$ при $N \to \infty$.

Из явного вида сферических функций следует, что на $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ и S^2 число критических точек члена последовательности собственных функций оператора Лапласа с номером N конечно и растет при $N \to \infty$ не медленнее, чем N. Таким образом, оценка сверху по степени номера N точна для $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ и S^2.

Для двумерного компактного риманова многообразия без края M^2 оценка сверху для числа критических точек L_N (если их конечное число), лежащих на линии уровня 0 у N-й собственной функции ψ_N лапласиана Δ ($\Delta\psi_N = \lambda_N\psi_N$) дана в [1]. Точнее, в [1] доказано, что $L_N = \sum\limits_{a\in\Gamma}(k(a)-1) \leqslant N - \chi(M^2)$, где Γ — линия уровня 0 для ψ_N, $k(a)$ — степень главной однородной части функции ψ_N в точке $a \in \Gamma$, $\chi(M^2)$ — эйлерова характеристика многообразия M^2.

Более точная оценка величины L_N для случая, когда M^2 есть $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ или S^2, получена в [2].

[1] Карпушкин В. Н. О кратности особых точек собственных функций оператора Лапласа–Бельтрами. *Функц. анализ и его прилож.*, 1995, **29**(1), 80–82.

[2] Карпушкин В. Н. О топологии нулей собственных функций. *Функц. анализ и его прилож.*, 1989, **23**(3), 59–60.

В. Н. Карпушкин

1987-11

См. комментарий к задаче *1986-12*.

1987-14, а также *1988-13* и *1990-27*

Объем, отсекаемый от компактной *выпуклой* области, ограниченной гладкой алгебраической гиперповерхностью в *четномерном* пространстве, никогда не алгебраичен. В нечетномерном пространстве такие поверхности степени $\geqslant 3$, для которых эта функция объема алгебраична, если и существуют, то очень редки. Например, проективное замыкание их комплексификации в $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ не может быть неособым. Кроме того, эта комплексификация не может иметь дискретных параболических точек (т. е. точек неморсовского касания с касательной гиперплоскостью). Доказательства (как и у Ньютона) основаны на теории Пикара–Лефшеца — изучении монодромии сегмента при движении гиперплоскости в комплексной области: как правило, его орбита (и множество интегралов по ее элементам) бесконечны, поэтому аналитическое продолжение функции объема обязано иметь логарифмическое ветвление. Указанные результаты подробно изложены в [1–2], см. также [3].

[1] Arnol′d V. I., Vasil′ev V. A. Newton's *Principia* read 300 years later. *Notices Amer. Math. Soc.*, 1989, **36**(9), 1148–1154; addendum: 1990, **37**(2), 144.

[2] Vassiliev V. A. Ramified Integrals, Singularities and Lacunas. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995. (Math. Appl., 315.)

[3] Арнольд В. И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. Первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов. М.: Наука, 1989.

В. А. Васильев

1988

1988-3

Рассмотрим гиперповерхность в $(2D+1)$-мерном контактном пространстве, диффеоморфную произведению обычного двумерного конуса $x^2+y^2=z^2$ на $(2D-2)$-мерное векторное пространство. Вопрос: каковы локальные нормальные формы такой гиперповерхности относительно диффеоморфизмов, сохраняющих контактную структуру, в случае общего положения? Этот вопрос связан с теорией симметрических гиперболических систем уравнений с частными производными (см. задачу *1978-17*), внутренним рассеянием волн (см. задачу *1989-10*), релаксационными колебаниями и теорией обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной [1].

Нормальные формы рассматриваемой гиперповерхности в ее типичной особой точке относительно формальных диффеоморфизмов, сохраняющих контактную структуру, найдены для $D=1$ в [1], а для $D\geqslant 2$ — в [2]. В обоих случаях имеются две нормальные формы — эллиптическая и гиперболическая, однако явные формулы проще при $D\geqslant 2$. Дело в том, что при $D=1$ в обеих нормальных формах присутствует непрерывный числовой инвариант (*модуль*), исчезающий при $D\geqslant 2$.

В аналитическом случае ряды, определяющие формальный нормализующий диффеоморфизм, как правило, расходятся при любом D. Возможно, существуют бесконечно гладкие диффеоморфизмы, приводящие исходную гиперповерхность к вышеупомянутым нормальным формам — набросок доказательства для $D=1$ можно найти в [1, 3–4], однако его детали не опубликованы. Это доказательство основано на интересной связи между приведением к нормальной форме контактной структуры на трехмерной окрестности вершины квадратичного конуса и теорией нормальных форм эквивариантных плоских векторных полей в особых точках. Вопрос же о существовании бесконечно гладкого нормализующего диффеоморфизма при $D \geqslant 2$ открыт.

При $D \geqslant 2$ у рассматриваемой гиперповерхности устойчивым образом могут появляться вырождения относительно контактной структуры, которые естественно назвать *параболическими.* Действительно, на многообразии особых точек нашей гиперповерхности естественно выделяются эллиптические и гиперболические области в соответствии с нормальной формой, к которой приводится гиперповерхность в окрестности данной точки. В случае общего положения эллиптические и гиперболические области разделены гиперповерхностями с параболическими вырождениями. По всей видимости, при типичном параболическом вырождении гиперповерхность имеет функциональные модули даже относительно формальных диффеоморфизмов.

[1] Арнольд В. И. О поверхностях, определяемых гиперболическими уравнениями. *Матем. заметки*, 1988, **44**(1), 3–18. [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 397–412.]

[2] Arnol′d V. I. On the interior scattering of waves, defined by hyperbolic variational principles. *J. Geom. Phys.*, 1988, **5**(3), 305–315.

[3] Arnol′d V. I. Singularities of Caustics and Wave Fronts. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990. (Math. Appl., Soviet Ser., 62.)

[4] Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996.

И. А. Богаевский

1988-4

Эта задача может быть решена стандартными методами комплексной динамики, что и было сделано в курсовой работе О. С. Козловского (1990).

Между любыми двумя отталкивающими периодическими точками диффеоморфизма окружности обязательно находится притягивающая (или вырожденная) периодическая точка, поэтому достаточно оценить число притягивающих и вырожденных периодических точек. Для этого нужно голоморфно продолжить действие диффеоморфизма на фундаментальный параллелограмм эллиптической функции и заметить, что любая область непосредственного притяжения притягивающей или вырожденной периодической траектории содержит критическую точку голоморфного продолжения данного диффеоморфизма. Более того, ввиду симметрии по отношению к комплексному сопряжению, область непосредственного притяжения действительной периодической траектории содержит две критические точки.

Таким образом, число периодических орбит диффеоморфизма $\mathbb{S}^1$ вида $x \mapsto x + a + f(x)$, где $f(x)$ — эллиптическая функция, ограничено сверху числом корней уравнения $f'(z) = -1$, где z принадлежит фундаментальному параллелограмму функции f.

О. С. Козловский

1988-6, а также *1988-7*, *1989-2* и *1994-45*

Задачи о скоростях роста числа периодических траекторий диффеоморфизма и числа точек пересечения двух многообразий дополнительной размерности, одно из которых фиксировано, а другое итерируется под действием диффеоморфизма, тесно связаны между собой. Действительно, пусть $F\colon M \to M$ — диффеоморфизм, тогда число периодических точек диффеоморфизма F периода n (не обязательно минимального) равно числу точек пересечения многообразий $\widetilde{F}^n(X) \cap X$, где $\widetilde{F} = (\mathrm{id}, F)\colon M \times M \to M \times M$, а X — диагональ в $M \times M$.

Оказывается, скорости роста числа периодических точек и числа точек пересечения зависят от класса гладкости диффеоморфизма F.

Если F — *алгебраический* диффеоморфизм, то, очевидно, скорость роста ограничена некоторой экспонентой. В частности, поскольку алгебраические диффеоморфизмы плотны в пространстве гладких диффеоморфизмов, то в этом пространстве существует всюду плотное множество диффеоморфизмов, для которых скорость роста числа периодических точек мажорируется экспонентой [1]. По-видимому, показатель этой экспоненты равен топологической энтропии диффеоморфизма h_{top}. В пользу этой гипотезы говорит тот факт, что если

$f : [0;1] \to [0;1]$ — C^3-отображение отрезка с неплоскими критическими точками, то $h_{\text{top}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \#\mathrm{Per}_n$, где $\#\mathrm{Per}_n$ — число периодических точек отображения f периода n. (Эта формула следует из [2–3].)

Для любой числовой последовательности a_n можно построить такой *аналитический* диффеоморфизм F двумерного тора, что число точек пересечения $F^{n_i}(\mathbb{S}^1) \cap \mathbb{S}^1$ больше, чем a_{n_i}, где $\mathbb{S}^1$ — некоторая фиксированная окружность на торе, а n_i — подпоследовательность натуральных чисел [4]. Аналогичный пример для скорости роста числа периодических точек аналитического диффеоморфизма не известен.

В случае, когда F — *гладкий* диффеоморфизм, пример сколь угодно быстрого роста числа периодических траекторий существует [5]. Более того, оказывается, что диффеоморфизмов со сверхэкспоненциальным ростом числа периодических траекторий достаточно много: множество таких диффеоморфизмов не является множеством первой категории. Пример сколь угодно быстрого роста числа точек пересечения построен в [6].

[1] Artin M., Mazur B. On periodic points. *Ann. Math., Ser.* 2, 1965, **81**(1), 82–99. [*Перевод на русский язык*: Артин М., Мазур Б. О периодических точках. *Математика* (*сборник переводов*), 1967, **11**(5), 3–20.]

[2] Misiurewicz M., Szlenk W. Entropy of piecewise monotone mappings. *Studia Math.*, 1980, **67**(1), 45–63.

[3] de Melo W., van Strien S. One-dimensional Dynamics. Berlin: Springer, 1993. [*Перевод на русский язык* готовится в изд-ве ФАЗИС.]

[4] Козловский О. С. Динамика пересечений аналитических многообразий. *ДАН*, 1992, **323**(5), 823–825.

[5] Kaloshin V. Yu. Generic diffeomorphisms with superexponential growth of number of periodic orbits. Preprint, Stony Brook IMS Preprint Series, # 99/2 (1999).

[6] Arnol′d V. I. Dynamics of intersections. In: Analysis, et cetera. Research papers published in honor of Jürgen Moser's 60th birthday. Editors: P. H. Rabinowitz and E. Zehnder. Boston, MA: Academic Press, 1990, 77–84.

О. С. Козловский

* * *

1988-6, а также *1988-7*, *1988-8*, *1989-2*, *1990-1*, *1990-20*, *1990-21*, *1992-12* – *1992-14*, *1994-45* – *1994-50*

Задачи *1988-6*, *1988-7*, *1989-2*, *1990-21*, *1992-12* – *1992-14*, *1994-45* – *1994-48* и первая половина задачи *1988-8* относятся к проблеме асимптотики топологической сложности пересечений. В наиболее общей постановке (см. задачи *1988-8* и *1994-48*) эта проблема формулируется следующим образом. Пусть M^m — компактное многообразие размерности m, а X^k и Y^l — его компактные подмногообразия размерностей k и l соответственно. Пусть также $A\colon M \to M$ — некоторое отображение. Требуется оценить асимптотику того или иного топологического инварианта (в простейшем случае — числа компонент связности) пересечения $(A^nX) \cap Y$ (где $A^n\colon M \to M$ означает n-ю итерацию отображения A) при $n \to +\infty$.

В частном случае вопрос заключается в оценке асимптотики числа периодических траекторий периода n отображения $B\colon N \to N$ некоторого многообразия N (ср. задачи *1988-7*, *1989-2*, *1992-13*, *1994-45* и *1994-47*).

Действительно, если $M = N \times N$, $X = Y = \{(x, x) \mid x \in N\}$ — диагональ в M и отображение $A\colon M \to M$ задано формулой $A(x, y) = (Bx, y)$, то точки пересечения A^nX с Y — это в точности точки вида (x, x), для которых $B^nx = x$. Как правило, в этом случае предполагается, что все периодические точки невырождены.

Вопрос об асимптотике топологической сложности пересечений может ставиться в алгебраической, гладкой (C^r с $r \leqslant +\infty$) и аналитической категориях.

Основные полученные здесь результаты следующие. М. Артин и Б. Мазур в статье [1] получили экспоненциальную оценку $\nu(n) \leqslant Ce^{\lambda n}$ числа $\nu(n)$ периодических траекторий периода n для *алгебраических* многообразий и отображений. В этой же статье они показали, что в функциональном пространстве гладких (класса C^r для любого натурального r) отображений $A\colon M \to M$ существует всюду плотное подмножество отображений, для которых справедлива такая же экспоненциальная оценка. В. И. Арнольд в работах [2–3] ([3] — это та заметка, о которой идет речь в задаче *1992-12*) доказал экспоненциальную оценку для значений различных топологических и интегро-топологических инвариантов [таких, как $(k + l - m)$-мерный объем или числа Морса и Бетти, в частности, число компонент связности] пересечения

$(A^nX^k)\cap Y^l$ в случае диффеоморфизмов $A\colon M^m\to M^m$. Однако эта оценка имеет место не всегда, а «почти всегда» («с вероятностью 1»), точнее, для почти всех (в смысле меры Лебега) значений параметра $t\in\mathbb{R}^p$ в типичных семействах неподвижных многообразий Y_t^l, если размерность p пространства параметров достаточно велика. В работе [2] построен также C^∞ пример *сколь угодно быстрого роста* числа компонент связности $(A^nX^k)\cap Y^l$ (в этом примере M является двумерным тором, а $X=Y$ — окружность на M). Аналогичный аналитический пример построен О. С. Козловским в статье [4], так что ответ на вопрос задачи *1988-6* положителен. В работах [5–6] построены примеры сколь угодно быстрого роста числа периодических траекторий периода n диффеоморфизма $A\colon M\to M$ (при $n\to+\infty$) и числа замкнутых траекторий периода не более T гладкого векторного поля V на N (при $T\to+\infty$) для *любого* компактного многообразия M размерности $\geqslant 2$ и *любого* компактного многообразия N размерности $\geqslant 3$. При этом все периодические точки или замкнутые траектории невырождены.

Вопрос задачи *1992-12*, насколько известно автору настоящего комментария, остается открытым.

Вторая половина задачи *1988-8* и задачи *1990-1*, *1990-20*, *1994-49*, *1994-50* посвящены локальному аналогу проблемы асимптотики топологической сложности пересечений, рассмотренному в статье [7].

Весь круг вопросов, затронутых в задачах *1988-6*, *1988-7*, *1988-8*, *1989-2*, *1990-1*, *1990-20*, *1990-21*, *1992-12 – 1992-14*, *1994-45 – 1994-50*, подробно обсуждается в обзорных статьях В. И. Арнольда [8–9].

Дальнейшие результаты см. в работах Г. Э. Росалеса [10–11]. К рассматриваемой тематике близко примыкают задачи *1991-3*, *1992-5*, *1993-35* и *1993-36*.

[1] Artin M., Mazur B. On periodic points. *Ann. Math., Ser.* 2, 1965, **81**(1), 82–99. [*Перевод на русский язык*: Артин М., Мазур Б. О периодических точках. *Математика (сборник переводов)*, 1967, **11**(5), 3–20.]

[2] Arnol′d V. I. Dynamics of intersections. In: Analysis, et cetera. Research papers published in honor of Jürgen Moser's 60th birthday. Editors: P. H. Rabinowitz and E. Zehnder. Boston, MA: Academic Press, 1990, 77–84.

[3] Arnol′d V. I. Dynamics of complexity of intersections. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N. S.)*, 1990, **21**(1), 1–10. [*Перевод на русский язык в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 489–499.]

[4] Козловский О. С. Динамика пересечений аналитических многообразий. *ДАН*, 1992, **323**(5), 823–825.

[5] Росалес Г. Э. О росте чисел периодических орбит динамических систем. *Функц. анализ и его прилож.*, 1991, **25**(4), 14–22.

[6] Росалес Г. Э. О росте числа долгопериодических решений дифференциальных уравнений. *Функц. анализ и его прилож.*, 1992, **26**(2), 29–35.

[7] Arnol′d V. I. Bounds for Milnor numbers of intersections in holomorphic dynamical systems. In: Topological Methods in Modern Mathematics. Proceedings of the symposium in honor of John Milnor's sixtieth birthday. Editors: L. R. Goldberg and A. V. Phillips. Houston, TX: Publish or Perish, 1993, 379–390.

[8] Arnol′d V. I. Problems on singularities and dynamical systems. In: Developments in Mathematics: the Moscow School. Editors: V. I. Arnol'd and M. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993, 251–274.

[9] Arnol′d V. I. Sur quelques problèmes de la théorie des systèmes dynamiques. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 1994, **4**(2), 209–225. [*Перевод на русский язык в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 533–551.]

[10] Rosales-González E. Milnor numbers in dynamical systems. In: Singularity Theory (Trieste, 1991). Editors: D. T. Lê, K. Saito and B. Teissier. River Edge, NJ: World Sci. Publ., 1995, 627–634.

[11] Rosales-González E. Intersection dynamics on Grassmann manifolds. *Bol. Soc. Mat. Mexicana, Ser.* 3, 1996, **2**(2), 129–138.

М. Б. Севрюк

1988-7

См. комментарии к задаче *1988-6*.

1988-8

См. комментарии к задаче *1988-6*.

1988-9

Гомологии указанных дополнений вычислены в [1]. Их гомотопический тип (и кольца когомологий) стабилизируются к таковым для пространства петель ΩS^k ([2], см. также [3]). Для произвольного замкнутого класса особенностей $A \subset J^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ коразмерности $\geqslant 2$ кольца когомологий (а в случае коразмерности $\geqslant 3$ — и гомотопический тип) дополнений к соответствующим стратам дискриминантов достаточно сложных изолированных особенностей в $\mathbb{R}^n$ стабилизируются к когомологиям (гомотопическому типу) пространства $\Omega^n(J^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \setminus A)$. Это доказано в [4] (см. также [3]) в случае комплексных особенностей, но по недосмотру, кажется, не сформулировано для вещественного случая.

По-видимому, и в «гомотопической» формулировке можно условие codim $\geqslant 3$ заменить на $\geqslant 2$ (в отличие от комплексной ситуации). Во всяком случае, в аналогичной «нелокальной» задаче о пространстве функций $M^n \to \mathbb{R}$ без особенностей A_3 или сложнее такой «h-принцип» имеет место: это пространство гомотопически эквивалентно соответствующему пространству допустимых сечений струйного расслоения $J^k(M^n, \mathbb{R}) \to M^n$ (K. Igusa, 1984, — гомотопическая эквивалентность до размерности $n - 1$, Н. М. Мишачев – Я. М. Элиашберг — во всех размерностях, ср. [3]).

[1] Арнольд В. И. Пространства функций с умеренными особенностями. *Функц. анализ и его прилож.*, 1989, **23**(3), 1–10. [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 455–469.]

[2] Васильев В. А. Топология пространств функций без сложных особенностей. *Функц. анализ и его прилож.*, 1989, **23**(4), 24–36.

[3] Васильев В. А. Топология дополнений к дискриминантам. М.: ФАЗИС, 1997.

[4] Vassiliev V. A. Topology of complements to discriminants and loop spaces. In: Theory of Singularities and its Applications. Editor: V. I. Arnol′d. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990, 9–21. (Advances in Soviet Math., 1.)

В. А. Васильев

1988-10

Стабилизация гомологий доказана В. И. Арнольдом [1]. При $k \geqslant 2$ гомотопический тип указанных дополнений сходится к таковому для $\Omega^2 S^{2k+1}$, а при $k = 1$ (т. е. когда ${}^{\mathbb{C}}A_k$ — это весь дискриминант) только стабильный гомотопический тип (в частности, все гомологии, включая экстраординарные) сходится к таковому для $\Omega^2 S^3$. Вообще, для любого n и любого класса особенностей $A \subset J^k(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ стабильный гомотопический тип дополнений к страту $\{A\}$ в пространствах деформаций особенностей функций $(\mathbb{C}^n,0) \to \mathbb{C}$ сходится (при усложнении этих особенностей) к таковому для пространства $\Omega^{2n}(J^k(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}) \setminus A)$. Если $\operatorname{codim}_{\mathbb{C}} A \geqslant 2$, то это верно и для настоящего гомотопического типа [2].

[1] Арнольд В. И. О некоторых топологических инвариантах алгебраических функций. I. *Труды Моск. матем. об-ва*, 1970, **21**, 27–46.

[2] Vassiliev V. A. Topology of complements to discriminants and loop spaces. In: Theory of Singularities and its Applications. Editor: V. I. Arnol′d. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990, 9–21. (Advances in Soviet Math., 1.)

В. А. Васильев

1988-11

Обобщениям классической теоремы [1] о четырех вершинах плоской кривой посвящено множество работ. Еще в 1912 г. было замечено (см. [2]), что при стереографической проекции вершины плоской кривой переходят в точки уплощения ее образа в пространстве (в работе [3] выяснилось, что это — проявление общей связи особенностей огибающей семейства нормалей к многообразию с особенностями фронта касательных гиперплоскостей к его стереографическому образу). Следовательно, всякая несамопересекающаяся замкнутая кривая на сфере в трехмерном пространстве имеет не менее четырех точек уплощения.

В дальнейшем теорема о четырех точках уплощения была доказана для более широких классов пространственных кривых, а именно: для кривых, лежащих на поверхностях, которые пересекаются с любой прямой не более, чем в двух точках [4]; для кривых, через каждую пару точек которых проходит плоскость, нигде более не пересекающая кривую [5]; для кривых, лежащих на границе своей выпуклой оболочки (такие кривые следует называть *слабо выпуклыми*) и пересекающих любую плоскость в конечном числе точек, а любую прямую — не более, чем в двух точках [6]; для слабо выпуклых кривых общего положения [7]. В 1992 г. теорема о четырех точках уплощения была доказана при более слабых предположениях:

Теорема [8]. *Всякая замкнутая слабо выпуклая кривая, C^3-вложенная в трехмерное пространство, имеет не менее четырех точек уплощения, если ее кривизна всюду отлична от нуля.*

Заметим, что в работе [5] даны многомерные обобщения теоремы о четырех вершинах. Например, в [5] доказано, что гладкая замкнутая кривая в n-мерном проективном пространстве имеет не менее $n+1$ точки уплощения, если через каждые $n-1$ ее точек проходит гиперплоскость, нигде более не пересекающая кривую. В частном случае кривых, имеющих выпуклую проекцию на некоторую гиперплоскость, это утверждение было получено также и в [9].

В работе [7] теорема о четырех точках уплощения выводится из соотношения $C-T=4$, связывающего число C опорных соприкасающихся плоскостей с числом T опорных плоскостей, касающихся кривой в трех точках. Обобщение этого соотношения для слабо выпуклых подмногообразий в многомерных пространствах было получено в [10–11] как результат вычисления гомологий множества особых опорных гиперплоскостей к подмногообразию. Обобщение указанного соотношения для произвольных подмногообразий в евклидовых пространствах приведено в [12–13].

Многочисленные работы связаны с обобщением теоремы о четырех вершинах в терминах симплектической и контактной топологии (см., например, [14–16]). Найдены дискретные версии теорем [1, 8] для ломаных на плоскости и в пространстве (см. статью [17] и список литературы в ней). Доказаны теоремы о вершинах и точках уплощения кривых в пространствах Лобачевского [18]. Получены некоторые обобщения теоремы [8] для слабо выпуклых кривых, имеющих точки нулевой кривизны [19], а также для кривых, не являющихся слабо выпуклыми [20]. В рамках проективной топологии доказана «теорема о теннисном мяче»:

Теорема [21]. *Всякая гладкая замкнутая кривая, вложенная в стандартную сферу и делящая ее площадь пополам, имеет не менее четырех точек сферического перегиба.*

Имеются и другие работы, так или иначе связанные с различными обобщениями теоремы о четырех вершинах. Однако необходимые и достаточные условия, при которых кривая в трехмерном пространстве имеет не менее четырех точек уплощения, до сих пор не найдены.

[1] Mukhopadhaya S. New methods in the geometry of a plane arc, I. Cyclic and sextactic points. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 1909, **1**, 31–37.

[2] Kneser A. Bemerkungen über die Anzahl der Extreme der Krümmung geschlossenen Kurven und über verwandte Fragen in einer nicht-euclidischen Geometrie. In: Festschrift H. Weber 70. Leipzig, 1912, 170–180.

[3] Седых В. Д. Связь лагранжевых особенностей с лежандровыми при стереографической проекции. *Матем. сборник*, 1994, **185**(12), 123–130.

[4] Mohrmann H. Die Minimalzahl der stationären Ebenen eines räumlichen Ovals. *Sitz. Ber. kgl. Bayerichen Akad. Wiss., Math.-Phys. Kl.*, 1917, 1–3.

[5] Barner M. Über die Mindestanzahl stationärer Schmiegebenen bei geschlossenen streng-konvexen Raumkurven. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 1956, **20**, 196–215.

[6] Bisztriczky T. Inflectional convex space curves. *Canad. J. Math.*, 1984, **36**(3), 537–549.

[7] Romero-Fuster M. C. Convexly generic curves in $\mathbb{R}^3$. *Geom. Dedicata*, 1988, **28**(1), 7–29.

[8] Седых В. Д. Теорема о четырех вершинах выпуклой пространственной кривой. *Функц. анализ и его прилож.*, 1992, **26**(1), 35–41.

[9] Arnol′d V. I. On the number of flattening points of space curves. In: Sinaĭ's Moscow Seminar on Dynamical Systems. Editors: L. A. Bunimovich, B. M. Gurevich and Ya. B. Pesin. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996, 11–22. (AMS Translations, Ser. 2, 171; Advances in Math. Sci., 28.)

[10] Седых В. Д. Инварианты выпуклых многообразий. *ДАН*, 1992, **326**(6), 948–952.

[11] Седых В. Д. Инварианты строго выпуклых многообразий. *Функц. анализ и его прилож.*, 1993, **27**(3), 67–75.

[12] Седых В. Д. Инварианты неровных многообразий. *Функц. анализ и его прилож.*, 1995, **29**(3), 41–50.

[13] Sedykh V. D. Invariants of submanifolds in Euclidean space. In: The Arnol′d–Gel′fand Mathematical Seminars: Geometry and Singularity Theory. Editors: V. I. Arnol′d, I. M. Gel′fand, V. S. Retakh and M. Smirnov. Boston, MA: Birkhäuser, 1997, 389–395.

[14] Арнольд В. И. Геометрия сферических кривых и алгебра кватернионов. *Успехи матем. наук*, 1995, **50**(1), 3–68.

[15] Арнольд В. И. Топологические проблемы теории распространения волн. *Успехи матем. наук*, 1996, **51**(1), 3–50.

[16] Арнольд В. И. К лежандровой теории Штурма пространственных кривых. *Функц. анализ и его прилож.*, 1998, **32**(2), 1–7.

[17] Sedykh V. D. Discrete versions of the four-vertex theorem. In: Topics in Singularity Theory. V. I. Arnol′d's 60th Anniversary Collection. Editors: A. Khovanskiĭ, A. Varchenko and V. Vassiliev. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997, 197–207. (AMS Translations, Ser. 2, 180; Advances in Math. Sci., 34.)

[18] Uribe Vargas R. On the $(2k+2)$-vertex and $(2k+2)$-flattening theorems in higher dimensional Lobatchevskian space. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1997, **325**(5), 505–510.

[19] Romero-Fuster M. C., Sedykh V. D. On the number of singularities, zero curvature points and vertices of a simple convex space curve. *J. Geometry*, 1995, **52**(1–2), 168–172.

[20] Romero-Fuster M. C., Sedykh V. D. A lower estimate for the number of zero-torsion points of a space curve. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, 1997, **38**(1), 183–192.

[21] Арнольд В. И. О топологических свойствах лежандровых проекций в контактной геометрии волновых фронтов. *Алгебра и анализ*, 1994, **6**(3), 1–16.

В. Д. Седых

1988-13

См. комментарий к задаче *1987-14*.

1988-16

См. комментарии к задачам *1972-27*, *1993-27* и *1998-9*.

1988-23

Исследования, относящиеся к тематике задачи, берут свое начало в 1970-х гг. [1]. Важной вехой стала работа В. И. Арнольда [2], цитированная в условии задачи.

Андраш Сюч (A. Szűcs) реализовал идею М. Л. Громова и построил пространство, классифицирующее погружения с предписанными кратностями точек самопересечения с точностью до кобордизма (1978 г.). Он также построил пространство, классифицирующее отображения с предписанными простейшими мультиособенностями (1980-е гг.) и описал алгебраические приложения. Близкие результаты получил U. Koschorke несколько ранее другим методом.

Ученик А. Сюча Ричард Римани (R. Rimányi) развил идею классифицирующего пространства, добавив сложные особенности типов Σ^2 и еще более сложные, при помощи изучения локальной алгебры (1998 г.).

Пространство функций с умеренными особенностями и пространство плоских кривых без горизонтальных перегибов [2] обобщают конструкцию Понтрягина–Тома в другом направлении. Наиболее интересный (и сложный) результат относится к этому обобщению (M^2 в $\mathbb{R}^3$) [3]. Работа [3] написана после обсуждений с В. И. Арнольдом и связана с последними результатами М. Э. Казаряна, см. также обзор в [4].

[1] Арнольд В. И. Топологические инварианты алгебраических функций. II. *Функц. анализ и его прилож.*, 1970, **4**(2), 1–9.

[2] Арнольд В. И. Пространства функций с умеренными особенностями. *Функц. анализ и его прилож.*, 1989, **23**(3), 1–10. [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 455–469.]

[3] Ахметьев П. М. Гладкие погружения многообразий малых размерностей. II. Группы кобордизма критических точек многопараметрических семейств функций. *Матем. сборник*, 1995, **186**(12), 37–62.

[4] Васильев В. А. Топология дополнений к дискриминантам. М.: ФАЗИС, 1997.

П. М. Ахметьев

1988-24

Н. В. Илюшечкин [1] нашел явное выражение для дискриминанта характеристического многочлена нормальной комплексной матрицы в виде суммы (большого числа) квадратов модулей многочленов от коэффициентов матрицы. Для частного случая вещественных симметрических матриц аналогичный результат получен тем же автором раньше [2].

[1] Илюшечкин Н. В. Дискриминант характеристического многочлена нормальной матрицы. *Матем. заметки*, 1992, **51**(3), 16–23.

[2] Илюшечкин Н. В. Об одном классе гладких матричнозначных функций. *Успехи матем. наук*, 1985, **40**(1), 201–202.

С. В. Дужин

* * *

1988-24

Стратификация пространств квадратичных, эрмитовых и гиперэрмитовых форм по кратностям собственных чисел изучалась в работах [1] (вещественный случай), [2] (эрмитов, т. е. комплексный, случай) и [3] (гиперэрмитов, т. е. кватернионный, случай).

Параллелизм теорий квадратичных, эрмитовых и гиперэрмитовых форм — частное проявление общего феномена $\mathbb{R}$–$\mathbb{C}$–$\mathbb{H}$-троичности в математике. Перечни $\mathbb{R}$–$\mathbb{C}$–$\mathbb{H}$-триад, возникающих в самых разных разделах математической науки, приведены в работах [4–6], см. также комментарии к задачам *1997-9* и *1998-16*.

[1] Арнольд В. И. Моды и квазимоды. *Функц. анализ и его прилож.*, 1972, **6**(2), 12–20. [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 189–202.]

[2] Arnol′d V. I. Remarks on eigenvalues and eigenvectors of Hermitian matrices, Berry phase, adiabatic connections and quantum Hall effect. *Selecta Math.* (*N. S.*), 1995, **1**(1), 1–19. [*Перевод на русский язык в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 583–604.]

[3] Казарян М. Э. Замечание о собственных векторах и собственных значениях гиперэрмитовых матриц. Препринт, 1998. [*Интернет*: `http://www.botik.ru/~duzhin/as-papers/`]

[4] Арнольд В. И. Таинственные математические троицы. Принцип топологической экономии в алгебраической геометрии. М.: Изд-во МЦНМО, МК НМУ, 1997.

[5] Arnol′d V. I. Symplectization, complexification and mathematical trinities. The second Toronto lecture (1997). *Fields Institute Commun.* (to appear); CEREMADE (UMR 7534), Université Paris-Dauphine, № 9815, 04/03/1998. [*Интернет*: `http://www.botik.ru/~duzhin/arnold/arn-papers.html`]

[6] Arnol′d V. I. Polymathematics: is mathematics a single science or a set of arts? CEREMADE (UMR 7534), Université Paris-Dauphine, № 9911, 10/03/1999; In: Mathematics — Its Frontiers and Perspectives. Intern. Math. Union, 2000 (to appear). [*Интернет*: `http://www.botik.ru/~duzhin/arnold/arn-papers.html`]

М. Б. Севрюк

1988-25

Для 3 образующих простота доказана Е. И. Коркиной, начиная с 4 простота есть не всегда: соответствующие контрпримеры построили Д. Эйзенбад и Б. Штурмфельс.

В. И. Арнольд

1988-26

Величина $\Delta(n) = \lim\limits_{N\to\infty} N(r(N))^n$ есть плотность плотнейшей *упаковки* (*укладки*) n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ непересекающимися шарами одного и того же радиуса, а величина $\Theta(n) = \lim\limits_{N\to\infty} N(R(N))^n$ есть плотность наиболее экономного *покрытия* n-мерного пространства перекрывающимися шарами одного и того же радиуса. Таким образом, эксцентриситет $\rho_n = \left(\frac{\Theta(n)}{\Delta(n)}\right)^{1/n}$. Проблеме наилучших упаковок и покрытий посвящено множество книг и статей, эта задача тесно связана с разными областями математики и физики: теорией решеток, теорией кодирования, геометрией чисел, квадратичными формами, простыми группами, кристаллографией, теорией суперструн, ... Этой теме посвящена очень содержательная и подробная книга [1] (особенно см. гл. 1, 2). Более популярное изложение дано в книге [2], но материала в ней значительно меньше.

Приведем некоторые результаты о наилучших укладках и покрытиях.

Обозначим через $\Delta^P(n)$, $\Theta^P(n)$ значения плотностей наилучших *решетчатых* укладок и покрытий — таких, у которых центры соответствующих шаров образуют решетку в $\mathbb{R}^n$. Естественно пытаться искать наилучшие укладки и покрытия среди решетчатых. При $n \geqslant 2$

$$\Delta^P(n) \leqslant \Delta(n) < 1 < \Theta(n) \leqslant \Theta^P(n).$$

(Очевидно, что при $n = 1$ $\Delta^P(1) = \Delta(1) = \Theta^P(1) = \Theta(1) = 1$.)

1) Точные значения $\Delta(n)$, $\Theta(n)$ найдены только при $n = 1, 2$, для них $\Delta^P(n) = \Delta(n)$, $\Theta^P(n) = \Theta(n)$, а наилучшие укладки и покрытия действительно являются решетчатыми. При $n = 2$ решетка у наилучшей укладки и у наилучшего покрытия одна и та же, это т. н. *гексагональная* решетка, у которой узлы лежат в вершинах правильных треугольников, заполняющих плоскость. В этом случае

$$\Delta(2) = \frac{\pi}{\sqrt{12}} \approx 0{,}9069, \qquad \Theta(2) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \approx 1{,}2092.$$

2) Найдены наилучшие *решетчатые* укладки при $n \leqslant 8$ и наилучшие *решетчатые* покрытия при $n \leqslant 5$; тем самым для этих n найдены точные значения $\Delta^P(n)$, $\Theta^P(n)$. По-видимому (хотя это и не доказано), для этих n значения $\Delta^P(n)$, $\Theta^P(n)$ совпадают с соответствующими

значениями $\Delta(n)$, $\Theta(n)$, т. е. в качестве наилучших действительно могут быть взяты решетчатые укладки и покрытия (хотя существуют и нерешетчатые укладки и покрытия с теми же оптимальными значениями плотностей $\Delta(n)$, $\Theta(n)$). Укажем наилучшие решетки при $n = 3$. Как доказал еще Гаусс, наиплотнейшая трехмерная решетчатая укладка задается т. н. *гранецентрической* решеткой (естественным обобщением на трехмерный случай гексагональной решетки). Соответствующее значение $\Delta^P(3) = \frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0{,}7405$. Р. П. Бамба (R. P. Bambah) доказал, что самое экономное трехмерное решетчатое покрытие задается т. н. *объемоцентрической* решеткой (она двойственна к гранецентрической); соответствующее значение $\Theta^P(3) \approx 1{,}4635$. Отметим, что при $3 \leqslant n \leqslant 8$ решетки, отвечающие наилучшим решетчатым укладкам и покрытиям, разные.

3) По всей видимости, найдены наилучшие решетчатые укладки и покрытия при $n = 12, 16, 24$ (скорее всего, они являются наилучшими и среди всех, а не только среди решетчатых укладок и покрытий). Все эти решетки весьма интересны. Особенно важна т. н. решетка Лича (J. Leech) в размерности $n = 24$, которая, предположительно, задает и наиплотнейшую укладку, и самое экономное покрытие. Эта решетка встречается в самых разнообразных математических задачах.

Не следует, однако, думать, что при всех значениях размерности n в качестве наилучших укладок и покрытий могут быть взяты решетчатые. Так, по-видимому, это не так при $n = 10, 11, 13$.

4) Минковский получил следующую оценку снизу для плотностей $\Delta(n)$, $\Delta^P(n)$ наиплотнейших укладок:

$$\Delta(n) \geqslant \Delta^P(n) \geqslant \frac{\zeta(n)}{2^{n-1}}, \qquad (1)$$

где $\zeta(n)$ — ζ-функция Римана. Отсюда

$$\log_2 \Delta(n) \geqslant -n + 1 + \varepsilon_n, \quad \text{где} \quad \varepsilon_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \qquad (2)$$

Доказательство Минковского неконструктивно. В нем проводится усреднение по решеткам и при этом вычисляется среднее значение плотностей для решетчатых укладок. Для больших значений n все известные конструкции укладок дают худший результат по сравнению с оценкой Минковского. Например, для решеток, естественным образом обобщающих гексагональную и гранецентрическую на произвольные значения размерности n, плотность укладки убывает с ростом n

сверхэкспоненциально. (Тем более это справедливо для кубических решеток.) Впрочем, имеются и конструктивно задаваемые решетки в размерности n, для которых плотность укладки при $n \to \infty$ убывает экспоненциально, но всё равно для них показатель экспоненты меньше, чем в оценке Минковского (для которой он равен 1/2).

5) Что касается оценок сверху для $\Delta(n)$, одна из них, имеющая наглядный смысл, была получена К. А. Роджерсом (C. A. Rogers). Он доказал, что

$$\Delta(n) \leqslant \sigma_n, \tag{3}$$

где σ_n — отношение объема пересечения правильного n-мерного симплекса с длиной стороны 2 с шарами радиуса 1 с центрами в вершинах этого симплекса к объему этого n-мерного симплекса. Отсюда для больших n вытекает, что

$$\log_2 \Delta(n) \leqslant -\frac{1}{2}n,$$

т. е. правая часть в оценке Роджерса (3) экспоненциально убывает с ростом n с показателем $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Г. А. Кабатянский и В. И. Левенштейн получили еще более сильную оценку, из которой следует, что при больших n

$$\log_2 \Delta(n) \leqslant -0{,}5990\, n.$$

Итак, при больших n

$$-1 \leqslant \frac{1}{n} \log_2 \Delta(n) \leqslant -0{,}5990. \tag{4}$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{1}{2} \leqslant \sqrt[n]{\Delta(n)} \leqslant 2^{-0{,}5990}. \tag{4$'$}$$

Результаты, аналогичные 4), 5), имеют место и для покрытий.

6) Роджерс доказал, что существуют решетчатые покрытия с плотностью $\leqslant cn(\ln n)^{\frac{1}{2}\log_2(2\pi e)}$ для некоторой константы c, т. е.

$$\Theta^P(n) \leqslant cn(\ln n)^{\frac{1}{2}\log_2(2\pi e)} \approx cn(\ln n)^{2{,}0471}. \tag{5}$$

(Эта оценка — аналог оценки (1).) Роджерс получил также аналогичную более сильную оценку для нерешетчатых покрытий:

$$\Theta(n) \leqslant n \ln n + n \ln \ln n + 5n. \tag{6}$$

Оценки (5), (6) неконструктивны (подобно оценке (1)).

7) С другой стороны, Г. С. М. Кокстер (H. S. M. Coxeter), Л. Фью (L. Few) и Роджерс получили следующую оценку снизу для $\Theta(n)$ (аналогичную оценке (3)):

$$\Theta(n) \geqslant \tau_n, \tag{7}$$

где τ_n — отношение объема пересечения правильного n-мерного симплекса с длиной стороны 2 с шарами радиуса $\left(\frac{2n}{n+1}\right)^{1/2}$ с центрами в вершинах этого симплекса к объему этого n-мерного симплекса (шары такого радиуса как раз покрывают этот симплекс). Таким образом,

$$\tau_n = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{n/2} \sigma_n \sim \frac{n}{e\sqrt{e}} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отсюда, из (6) и (7) вытекает, что

$$\frac{n}{e\sqrt{e}} \leqslant \Theta(n) \leqslant n \ln n + n \ln \ln n + 5n. \tag{8}$$

Заметим, что оценки сверху и снизу для $\Theta(n)$ в (8) значительно ближе друг к другу, чем соответствующие оценки сверху и снизу для $\Delta(n)$, вытекающие из (4).

Из (8) следует, что

$$\sqrt[n]{\Theta(n)} \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{8$'$}$$

8) Из (4′) и (8′) вытекает, что для эксцентриситета ρ_n асимптотически

$$2^{0,5990} \leqslant \rho_n \leqslant 2.$$

Это не противоречит утверждению, что $\rho_n \geqslant \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$, но противоречит гипотезе, что $\lim_{n\to\infty} \rho_n = \sqrt{2}$. По-видимому, в то время, когда была выдвинута эта гипотеза, не был известен результат Кабатянского–Левенштейна (это работа 1978 г.).

[1] Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы, т. 1, 2. М.: Мир, 1990. [*Английский оригинал* 1988 г.]

[2] Роджерс К. Укладки и покрытия. М.: Мир, 1968. [*Английский оригинал* 1964 г.]

А. М. Леонтович

1988-27

Это задача из статьи [1а] (3°, I.A; см. также [1б], с. 428).

[1a] Arnol′d V. I. On some problems in symplectic topology. In: Topology and Geometry. Rohlin Seminar. Editor: O. Ya. Viro. Berlin: Springer, 1988, 1–5. (Lecture Notes in Math., 1346.)

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 425–429.

1988-28

Это задача из статьи [1а] (3°, I.B; см. также [1б], с. 428).

[1a] Arnol′d V. I. On some problems in symplectic topology. In: Topology and Geometry. Rohlin Seminar. Editor: O. Ya. Viro. Berlin: Springer, 1988, 1–5. (Lecture Notes in Math., 1346.)

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 425–429.

1988-29

Это задача из статьи [1а] (3°, I.C; см. также [1б], с. 428).

[1a] Arnol′d V. I. On some problems in symplectic topology. In: Topology and Geometry. Rohlin Seminar. Editor: O. Ya. Viro. Berlin: Springer, 1988, 1–5. (Lecture Notes in Math., 1346.)

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 425–429.

1988-30

Это задача из статьи [1a] (3°, II.A; см. также [1б], с. 428).

[1a] Arnol′d V. I. On some problems in symplectic topology. In: Topology and Geometry. Rohlin Seminar. Editor: O. Ya. Viro. Berlin: Springer, 1988, 1–5. (Lecture Notes in Math., 1346.)

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 425–429.

1988-31

Это задача из статьи [1a] (3°, II.B; см. также [1б], с. 428).

[1a] Arnol′d V. I. On some problems in symplectic topology. In: Topology and Geometry. Rohlin Seminar. Editor: O. Ya. Viro. Berlin: Springer, 1988, 1–5. (Lecture Notes in Math., 1346.)

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 425–429.

1988-32

Это задача из статьи [1a] (3°, II.C; см. также [1б], с. 428).

[1a] Arnol′d V. I. On some problems in symplectic topology. In: Topology and Geometry. Rohlin Seminar. Editor: O. Ya. Viro. Berlin: Springer, 1988, 1–5. (Lecture Notes in Math., 1346.)

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 425–429.

1989

1989-2

См. комментарии к задачам *1988-6* и *1992-13*.

1989-3, а также *1990-18*

Если $\mathbb{R}^n$ — это пространство многочленов вида $x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \cdots + \lambda_{n-1}x + \lambda_n$, то при $n < 6$ имеем $(\mathbb{R}^n \setminus \overline{A}_3) \sim S^1$, а при $n = 6, 7, 8$ имеем $(\mathbb{R}^n \setminus \overline{A}_3) \sim S^2 \vee S^1$ (Ю. Г. Махлин, 1990, неопубликовано, см. анонс в [1]), поэтому $\pi_2 \cong \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ для $n \leqslant 8$.

[1] Васильев В. А. Топология дополнений к дискриминантам. М.: ФАЗИС, 1997.

В. А. Васильев

1989-10

В статье [1] (и в книге [2]) описаны эти системы в фазовом пространстве, но что́ получится из рассмотренных там лежандровых многообразий и их характеристик при проекции на физическое пространство-время, остается не исследованным до конца.

[1] Arnol′d V. I. On the interior scattering of waves, defined by hyperbolic variational principles. *J. Geom. Phys.*, 1988, **5**(3), 305–315.

[2] Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996. [*Английское издание* 1990 г.]

В. И. Арнольд (1989)

* * *

1989-10

Рассмотрим систему линейных уравнений Эйлера–Лагранжа с частными производными, возникающую из некоторого вариационного принципа

$$\delta \int L\,dt\,dx^1 \cdots dx^D = 0$$

с лагранжианом $L(t, x, u_t, u_x) = T(t, x, u_t) - V(t, x, u_x)$, где $t, x^1, \ldots, x^D$ — независимые переменные, $u^1, \ldots, u^m$ — зависимые переменные, плотность кинетической энергии T — положительно определенная квадратичная форма от первых временны́х производных зависимых переменных, а плотность потенциальной энергии V — неотрицательно определенная квадратичная форма от первых пространственных производных зависимых переменных. В общем случае коэффициенты обеих форм являются функциями от t и x. Распространение возмущений в упругой среде является хорошим модельным примером описываемой ситуации, в котором u — вектор смещения точки среды, и количество зависимых переменных, таким образом, равно размерности x-пространства $(m = D)$.

Как известно, распространение фронтов и лучей ударных и коротких волн описывается на уровне геометрической оптики *световой гиперповерхностью*, которая лежит в проективизованном кокасательном расслоении над пространством-временем и на которой вырождается главный матричный символ исходной системы уравнений с частными производными (явные формулы для него приведены в комментарии к задаче *1978-17*). А именно, *большой фронт* ударной волны — это гиперповерхность в пространстве-времени, на которой решение разрывно, *большой фронт* коротковолновой асимптотики — это гиперповерхность в пространстве-времени, на которой фаза асимптотики постоянна, большие фронты расслоены на лучи, а их сечения изохронами $t = \text{const}$ представляют собой *мгновенные фронты*, эволюционирующие с течением времени. Лежандровы подмногообразия световой гиперповерхности проектируются в большие фронты, а ее характеристики — в лучи. Мгновенный фронт в выделенный момент времени $t = 0$ называется *начальным*. Большой фронт определяется начальным неоднозначно — физически это означает, что начальный фронт распадается на несколько мгновенных, эволюционирующих независимо.

В рассматриваемом случае начальный фронт, вообще говоря, распадается на $2m$ мгновенных, главный символ представляет собой симметрическую матрицу, а система уравнений Эйлера–Лагранжа является гиперболической. Особенности световой гиперповерхности проектируются в точки пространства-времени, в которых эта гиперболичность нестрогая.

Если зависимых переменных две или больше, то световая гиперповерхность может иметь особенности, неустранимые малым возмущением коэффициентов лагранжиана как функций от t и x. Задача состоит в том, чтобы описать особенности большого фронта, систему лучей на нем и перестройки мгновенного фронта при *внутреннем рассеянии*, т. е. при прохождении соответствующего лежандрова многообразия через эти особенности. (В случае, когда световая гиперповерхность гладкая, эта задача решена при $D \leqslant 5$ — см., например, комментарий к задаче *1974-8*.) Предполагается, что начальный фронт гладкий и типичный, а коэффициенты лагранжиана общим образом зависят от точки пространства и, быть может, от времени. Последнее условие на физическом языке, в частности, означает, что рассматриваемая среда неоднородна, анизотропна и, может быть, неавтономна. Аналогичное явление встречается также и в однородных средах и называется коническим преломлением Гамильтона в кристаллах. Однако геометрическая оптика внутреннего рассеяния в типичных неоднородных и анизотропных средах существенно отличается от гамильтонова конического преломления.

Поставленная задача тривиальна на прямой ($D = 1$), решена для плоскости ($D = 2$) и открыта для пространства ($D = 3$).

Типичные особенности световой гиперповерхности описаны в [1]. Оказывается, что эти особенности такие же, как и особенности подмножества вырожденных матриц в пространстве симметрических. Например, простейшая особенность световой гиперповерхности (называемая *конической*) — это произведение обычного двумерного конуса $\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2$ на $(2D - 2)$-мерное векторное пространство. Описание особенностей световой гиперповерхности опирается на теорему трансверсальности для однородных отображений, доказанную в [2].

Нормальные формы пары, состоящей из общей контактной структуры и $2D$-мерной гиперповерхности, в окрестности ее конической особенности найдены для $D = 1$ в [1], а для $D \geqslant 2$ — в [3] (см. также задачу *1988-3*). В обоих случаях имеются две нормальные формы — эллиптическая и гиперболическая, однако явные формулы проще при $D \geqslant 2$. Согласно [1], при $D = 1$ эллиптическая нормальная форма невозможна для световых гиперповерхностей из-за гиперболичности самой системы уравнений Эйлера–Лагранжа, но, как показано в [4], она реализуется, если $D \geqslant 2$. Конические особенности световой гиперповерхности являются причиной гамильтонова преломления в кристаллах, но контактная структура в этом случае не является общей из-за однородности и поэтому не приводится ни к эллиптической, ни к гиперболической нормальной форме.

При $D = 1$ мгновенный фронт — это точка на x-прямой, большой фронт состоит только из одного (криволинейного) луча на (t, x)-плоскости, световая гиперповерхность — поверхность в трехмерном контактном пространстве, а лежандрово подмногообразие состоит лишь из одной характеристики. Из типичной начальной точки выходят $2m$ лучей, и ни одна из $2m$ соответствующих характеристик не проходит через особенности световой гиперповерхности, которые исчерпываются коническими. Итак, случай $D = 1$ тривиален.

При $D = 2$ в случае общего положения внутреннее рассеяние происходит лишь в гиперболических конических особенностях световой гиперповерхности. В самом деле, мгновенный фронт — это кривая на x-плоскости, большой фронт — это поверхность в трехмерном (t, x)-пространстве, лежандрово подмногообразие двумерно, а световая гиперповерхность четырехмерна и, как всегда, расслоена на характеристики. Нормальные формы показывают, что в отличие от эллиптического случая у гиперболической конической особенности световой гиперповерхности имеются две проходящие через нее характеристики. Все такие характеристики образуют трехмерное подмногообразие S на световой гиперповерхности. Далее, начальный фронт определяет лежандрову кривую в проективизованном кокасательном расслоении к x-пространству, которая при естественном поднятии определяет $2m$ изотропных кривых на световой гиперповерхности, которые называются *начальными условиями* и продолжаются с помощью характеристик до лежандровых поверхностей, проектирующихся в $2m$ больших фронтов. Последние, в свою очередь, определяют эволюции $2m$ мгновенных фронтов. Если начальный фронт типичен, то по соображениям размерности все начальные условия лежат на гладкой части световой гиперповерхности и могут пересекать подмногообразие S в отдельных точках. Характеристика, выходящая из каждого такого пересечения, попадает в гиперболическую коническую особенность, в окрестности которой лежандрова поверхность с пересекающим подмногообразие S начальным условием имеет особенность. При типичном начальном условии эти особенности описаны в [5–6], а соответствующие особенности больших фронтов, систем лучей на них и перестройки мгновенных фронтов исследованы в [7–9].

При $D = 3$ не описаны даже особенности лежандровых подмногообразий, возникающие при внутреннем рассеянии, не говоря уже о соответствующих особенностях больших фронтов, системах лучей на них и перестройках мгновенных фронтов. Отметим два новых явления, возникающих в этом случае. Во-первых, начальные условия могут устойчиво проходить через эллиптические и гиперболические конические особенности световой гиперповерхности. Во-вторых, лежандрово многообразие может устойчивым образом проходить через конические особенности световой гиперповерхности, которые естественно назвать *параболическими.* Они неустранимы уже при $D \geqslant 2$. Действительно, на многообразии конических особенностей световой гиперповерхности естественно выделяются эллиптические и гиперболические области в соответствии с нормальной формой, к которой приводится контактная структура в окрестности данной точки. Эллиптические и гиперболические области разделяются параболическими особенностями. По всей видимости, в окрестности типичной параболической особенности пара, состоящая из контактной структуры и световой гиперповерхности, имеет функциональные модули.

Со всеми вышеизложенными результатами можно подробно ознакомиться по книге [6] (см. главу 8 «Трансформации волн, определенных гиперболическими вариационными принципами»). Некоторые открытые топологические вопросы, связанные с обсуждаемой задачей, сформулированы там на с. 282. Эта книга, в отличие от ее первоначального издания [5] на английском языке, содержит описание особенностей больших фронтов, систем лучей на них и перестроек мгновенных фронтов при $D = 2$, впервые опубликованное в статье [8]. Однако ссылка на эту статью в книге [6] содержит опечатку — вместо [20] в примечании на с. 300 следует читать [201].

[1] Арнольд В. И. О поверхностях, определяемых гиперболическими уравнениями. *Матем. заметки*, 1988, **44**(1), 3–18. [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 397–412.]

[2] Khesin B. A. Singularities of light hypersurfaces and structure of hyperbolicity sets for systems of partial differential equations. In: Theory of Singularities and its Applications. Editor: V. I. Arnol′d. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990, 119–127. (Advances in Soviet Math., 1.)

[3] Arnol′d V. I. On the interior scattering of waves, defined by hyperbolic variational principles. *J. Geom. Phys.*, 1988, **5**(3), 305–315.

[4] Braam P. J., Duistermaat J. J. Normal forms of real symmetric systems with multiplicity. *Indag. Math.* (*N. S.*), 1993, **4**(4), 407–421.

[5] Arnol′d V. I. Singularities of Caustics and Wave Fronts. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990. (Math. Appl., Soviet Ser., 62.)

[6] Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996.

[7] Богаевский И. А. Внутреннее рассеяние лучей и волновых фронтов на плоскости. В кн.: Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996, § 8.5, 300–316.

[8] Богаевский И. А. Особенности распространения коротких волн на плоскости. *Матем. сборник*, 1995, **186**(11), 35–52.

[9] Bogaevskiĭ I. A. Singularities of short linear waves on the plane. In: The Arnol′d–Gel′fand Mathematical Seminars: Geometry and Singularity Theory. Editors: V. I. Arnol′d, I. M. Gel′fand, V. S. Retakh and M. Smirnov. Boston, MA: Birkhäuser, 1997, 107–112.

И. А. Богаевский

1989-15

Это задача из статьи [1а] (с. 191; см. также [1б], с. 471).

[1а] Арнольд В. И., Вишик М. И., Ильяшенко Ю. С., Калашников А. С., Кондратьев В. А., Кружков С. Н., Ландис Е. М., Миллионщиков В. М., Олейник О. А., Филиппов А. Ф., Шубин М. А. Некоторые нерешенные задачи теории дифференциальных уравнений и математической физики. *Успехи матем. наук*, 1989, **44**(4), 191–202.

Раздел «задачи В. И. Арнольда» (*с.* 191–192) *перепечатан в сборнике*:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 471–472.

1989-16

Это задача из статьи [1а] (с. 191; см. также [1б], с. 471).

[1а] Арнольд В. И., Вишик М. И., Ильяшенко Ю. С., Калашников А. С., Кондратьев В. А., Кружков С. Н., Ландис Е. М., Миллионщиков В. М., Олейник О. А., Филиппов А. Ф., Шубин М. А. Некоторые нерешенные задачи теории дифференциальных уравнений и математической физики. *Успехи матем. наук*, 1989, **44**(4), 191–202.

Раздел «задачи В. И. Арнольда» (*с.* 191–192) *перепечатан в сборнике*:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 471–472.

1989-17

Это задача из статьи [1а] (с. 191; см. также [1б], с. 471–472).

[1а] Арнольд В. И., Вишик М. И., Ильяшенко Ю. С., Калашников А. С., Кондратьев В. А., Кружков С. Н., Ландис Е. М., Миллионщиков В. М., Олейник О. А., Филиппов А. Ф., Шубин М. А. Некоторые нерешенные задачи теории дифференциальных уравнений и математической физики. *Успехи матем. наук*, 1989, **44**(4), 191–202.

Раздел «задачи В. И. Арнольда» (*с.* 191–192) *перепечатан в сборнике*:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 471–472.

1989-18

Это задача из статьи [1а] (с. 191–192; см. также [1б], с. 472).

[1а] Арнольд В. И., Вишик М. И., Ильяшенко Ю. С., Калашников А. С., Кондратьев В. А., Кружков С. Н., Ландис Е. М., Миллионщиков В. М., Олейник О. А., Филиппов А. Ф., Шубин М. А. Некоторые нерешенные задачи теории дифференциальных уравнений и математической физики. *Успехи матем. наук*, 1989, **44**(4), 191–202.

Раздел «задачи В. И. Арнольда» (*с.* 191–192) *перепечатан в сборнике*:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 471–472.

См. комментарий к задаче *1986-7*.

1989-19

Это задача из статьи [1а] (с. 192; см. также [1б], с. 472).

[1а] Арнольд В. И., Вишик М. И., Ильяшенко Ю. С., Калашников А. С., Кондратьев В. А., Кружков С. Н., Ландис Е. М., Миллионщиков В. М., Олейник О. А., Филиппов А. Ф., Шубин М. А. Некоторые нерешенные задачи теории дифференциальных уравнений и математической физики. *Успехи матем. наук*, 1989, **44**(4), 191–202.

Раздел «задачи В. И. Арнольда» (*с.* 191–192) *перепечатан в сборнике*:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 471–472.

См. комментарий к задаче *1971-11*.

1990

1990-1

Это задача из статьи [1] (p. 259).

[1] Arnol′d V. I. Problems on singularities and dynamical systems. In: Developments in Mathematics: the Moscow School. Editors: V. I. Arnol′d and M. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993, 251–274.

См. комментарии к задаче *1988-6.*

1990-7

Эта задача о *кратности* периодических точек не решена.

Если несколько изменить условие и спрашивать, ограничено ли (равномерно по a) *число* периодических точек, рождающихся при бесконечно малых b, то ответ будет отрицательным. Например, в качестве функции f можно взять следующий лакунарный ряд Фурье:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(p_k^2 x), \tag{1}$$

где p_k — простые числа, упорядоченные по возрастанию, $c_k = \exp(-p_k^2)$.

Поскольку коэффициенты ряда Фурье (1) убывают экспоненциально, то функция $f(x)$ аналитическая. При этом p_k-я итерация диффеоморфизма $x \mapsto x + 2\pi/p_k + bf(x)$ равна $x \mapsto x + bp_kc_k \sin(p_k^2 x) + o(b)$, поэтому при малых b этот диффеоморфизм имеет не менее p_k периодических орбит.

Таким же образом можно показать, что существует такая аналитическая функция $f(x)$, что *в первом приближении* кратность периодических точек диффеоморфизма $x \mapsto x + a + bf(x)$ не ограничена равномерно по a.

О. С. Козловский

1990-10

См. комментарий к задаче *1985-4.*

1990-11

Эта задача принадлежит к числу т. н. «любительских задач» А. Д. Сахарова (см. [1]).

Можно предложить три доказательства утверждения Сахарова.

Доказательство 1. Пусть на плоскости имеется n прямых в общем положении, т. е. никакие три прямые не пересекаются в одной точке и никакие две прямые не параллельны. Тогда любые две прямые пересекаются ровно в одной точке, и разным парам прямых соответствуют разные точки пересечения. Поэтому у такой конфигурации:

1) Число вершин N_0 (число точек пересечения прямых) равно

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2) На каждой из n прямых имеется $n-1$ вершина, и эти вершины делят прямую на n интервалов (сторон, или ребер). Поэтому общее число ребер N_1 равно

$$n \cdot n = n^2.$$

3) Индукцией по n доказывается, что число стран N_2 — число областей, на которые n прямых делят плоскость, — равно

$$1 + (1 + 2 + \cdots + n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

(То же следует из формулы Эйлера:

$$N_0 - N_1 + N_2 = 1,$$

откуда

$$N_2 = 1 + N_1 - N_0 = 1 + n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + 1.\ )$$

Поскольку каждое ребро принадлежит двум странам, то среднее число ребер у страны равно $\frac{2N_1}{N_2} = \frac{2n^2}{\frac{n(n+1)}{2}+1} \to 4$ при $n \to \infty$, что и требовалось доказать.[1]

---

[1] Очевидно, что среднее число вершин у страны асимптотически равно среднему числу ребер, так как у ограниченной страны (многоугольника) число вершин равно

Доказательство 2. Очевидно, что любые две конфигурации прямых на плоскости можно «прогомотопировать» друг в друга непрерывным движением прямых, причем так, чтобы в каждый момент времени двигалась бы только одна прямая, и если конфигурации были общего положения (невырождены), то в ходе гомотопии встречалось бы лишь конечное число моментов, когда конфигурации становятся вырожденными, причем вырождения были бы только простейшие: либо две прямые (и только две) становятся параллельными, либо три прямые (и только три) пересекаются в одной точке. Ясно, что при переходе через такое простейшее вырождение остаются одинаковыми и число вершин N_0, и число ребер N_1, и число стран N_2, и поэтому не меняется среднее число ребер у страны. Следовательно, оно такое же, как для конфигурации, получающейся малым шевелением конфигурации, состоящей из двух семейств параллельных прямых, для которой среднее число ребер асимптотически равно 4 (как для квадрата).

Доказательство 3. Это доказательство требует некоторой модификации постановки задачи. А именно, будем рассматривать конфигурации из n проективных прямых на проективной плоскости.

В этом случае каждое ребро соединяет две вершины (в отличие от конфигурации на обычной плоскости) и из каждой вершины выходят четыре ребра (это имело место и для обычной плоскости). Поэтому $4N_0 = 2N_1$, $N_1 = 2N_0$. Далее, из формулы Эйлера $N_0 - N_1 + N_2 = 1$ вытекает, что $N_2 = 1 + N_1 - N_0 = 1 + N_0$. Поэтому среднее число ребер у страны равно $\frac{2N_1}{N_2} = \frac{4N_0}{N_0+1} \to 4$ при $N_0 \to \infty$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. В доказательстве 3 не используется, что конфигурация состоит из прямых, можно вместо прямых брать произвольные замкнутые линии. В случае конфигурации из *n прямых* на проективной плоскости $N_0 = \frac{n(n-1)}{2}$, $N_1 = n(n-1)$, $N_2 = \frac{n(n-1)}{2} + 1$.

Замечание 2. Вместо задачи про конфигурации прямых на проективной плоскости можно было бы рассмотреть аналогичную задачу о

числу ребер, а у неограниченной страны число вершин на единицу меньше числа ребер, и при этом при больших n почти все страны ограничены. То же показывает и прямое вычисление: так как каждая вершина принадлежит четырем странам, то среднее число вершин у страны равно $4N_0/N_2 = 2n(n-1)[n(n+1)/2+1]^{-1} \to 4$ при $n \to \infty$. Между прочим, легко найти и точное количество неограниченных стран: оно равно $2N_1 - 4N_0 = 2n^2 - 2n(n-1) = 2n$.

конфигурациях больших кругов на сфере. В этом случае среднее число ребер у страны также асимптотически равно 4, причем количества вершин, ребер, стран соответственно в два раза больше, чем для прямых на проективной плоскости, т. е. $N_0 = n(n-1)$, $N_1 = 2n(n-1)$, $N_2 = n(n-1)+2$, и $N_0 - N_1 + N_2 = 2$.

Замечание 3. Аналогично решается задача о среднем числе ребер у страны в двумерной сети (в каждой вершине которой сходятся четыре ребра) на поверхности произвольного рода g. И в этом случае $N_1 = 2N_0$, $N_0 - N_1 + N_2 = 2 - 2g$, $\frac{2N_1}{N_2} = \frac{4N_0}{2-2g+N_0} \to 4$ при $N_0 \to \infty$.

Замечание 4. Аналогично решается и задача о среднем числе ребер у страны в двумерной сети общего вида — в каждой вершине которой сходятся ровно три ребра (любую двумерную сеть малой деформацией, чуть раздвигая вершины, можно превратить в такую). В этом случае $3N_0 = 2N_1$, $N_1 = \frac{3}{2}N_0$, и поэтому среднее число ребер у страны равно $\frac{2N_1}{N_2} = \frac{\frac{3}{2}N_0}{2-2g+N_1-N_0} = \frac{\frac{3}{2}N_0}{2-2g+\frac{1}{2}N_0} \to 6$ при $N_0 \to \infty$.

Замечание 5. Итак, точно вычисляется среднее значение числа ребер у страны для конфигурации прямых (т. е. двумерной сети, порожденной прямыми на плоскости, или на проективной плоскости, или на сфере). Возникает естественный вопрос о распределении числа ребер стран таких двумерных сетей. В отличие от среднего значения этого числа, распределение может быть разным для разных сетей. Подробное изучение этой задачи было проведено Льюисом с соавторами в цикле работ, см. статью [2], где приведена обширная библиография. В этой работе изложены также некоторые нестрогие математические модели, исходящие из гипотезы хаоса, на основе которых находится функция распределения числа ребер у стран.

Все вышесказанное в целом обобщается на многомерный случай.

Очевидным образом обобщается доказательство 2, и при этом получается утверждение Аикарди.

Обобщается и доказательство 1. При этом надо использовать индукцию по размерности.

Например, рассмотрим n плоскостей в общем положении в трехмерном пространстве. Введем обозначения: N_0 — число вершин, N_1 —

число ребер, N_2 — число 2-мерных граней, N_3 — число 3-мерных клеток. Далее, пусть π — какая-то из n плоскостей. Введем обозначения: $N_0(\pi)$ — число вершин, лежащих в плоскости π; $N_1(\pi)$ — число ребер в плоскости π; $N_2(\pi)$ — число 2-мерных граней в плоскости π. На плоскости π имеет место конфигурация общего положения из $n-1$ прямой. Поэтому $N_0(\pi) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, $N_1(\pi) = (n-1)^2$, $N_2(\pi) = \frac{n(n-1)}{2} + 1$. Поскольку каждая вершина принадлежит трем плоскостям, то

$$N_0 = \frac{1}{3}\sum_{\pi} N_0(\pi) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Так как каждое ребро принадлежит двум плоскостям, то

$$N_1 = \frac{1}{2}\sum_{\pi} N_1(\pi) = \frac{n(n-1)^2}{2}.$$

Поскольку каждая 2-мерная грань принадлежит одной плоскости, то

$$N_2 = \sum_{\pi} N_2(\pi) = \frac{n^2(n-1)}{2} + n.$$

Так как для n прямых на плоскости число стран равно $\frac{n(n+1)}{2} + 1$, то индукцией по n доказывается, что

$$N_3 = 1 + 1 + 2 + 4 + \cdots + \left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right) = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}.$$

(Заметим, что имеет место формула Эйлера:

$$N_0 - N_1 + N_2 - N_3 =$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n(n-1)^2}{2} + \frac{n^2(n-1)}{2} + n - \frac{n^3 + 5n + 6}{6} = -1.)$$

Поскольку в каждой вершине сходятся восемь 3-мерных клеток, то среднее число вершин у 3-мерной клетки равно

$$\frac{8N_0}{N_3} = \frac{8\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}{\frac{n^3+5n+6}{6}} \to 8$$

при $n \to \infty$. Так как к каждому ребру примыкают четыре 3-мерные клетки, то среднее число ребер у 3-мерной клетки равно

$$\frac{4N_1}{N_3} = \frac{4\frac{n(n-1)^2}{2}}{\frac{n^3+5n+6}{6}} \to 12$$

при $n \to \infty$. Поскольку к каждой 2-мерной грани примыкают две 3-мерные клетки, то среднее число 2-мерных граней у 3-мерной клетки равно

$$\frac{2N_2}{N_3} = \frac{n^2(n-1)+2n}{\frac{n^3+5n+6}{6}} \to 6$$

при $n \to \infty$, как и утверждает Аикарди.

Аналогично обобщается и доказательство 3. В этом случае надо рассматривать конфигурацию $(d-1)$-мерных проективных плоскостей (общего положения) в d-мерном проективном пространстве.

Например, пусть $d = 3$, т. е. рассматривается конфигурация проективных плоскостей в трехмерном проективном пространстве. Тогда в каждой проективной плоскости π имеем (см. выше доказательство 3): $N_1(\pi) = 2N_0(\pi)$, $N_2(\pi) = 1 + N_0(\pi)$. Поэтому

$$N_0 = \frac{1}{3}\sum_{\pi} N_0(\pi), \qquad N_1 = \frac{1}{2}\sum_{\pi} N_1(\pi) = \sum_{\pi} N_0(\pi) = 3N_0,$$

$$N_2 = \sum_{\pi} N_2(\pi) = \sum_{\pi} N_0(\pi) + \text{число плоскостей} = \\ = 3N_0 + \text{число плоскостей}.$$

Наконец, воспользуемся формулой Эйлера: $N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 0$, откуда

$$N_3 = N_0 + N_2 - N_1 = 4N_0 + \text{число плоскостей} - 3N_0 = \\ = N_0 + \text{число плоскостей}.$$

Отсюда среднее число вершин равно

$$\frac{8N_0}{N_3} = \frac{8N_0}{N_0 + \text{число плоскостей}} \to 8,$$

если среднее число вершин в плоскости $\to \infty$ (а это так, когда число плоскостей $\to \infty$); среднее число ребер равно

$$\frac{4N_1}{N_3} = \frac{12N_0}{N_0 + \text{число плоскостей}} \to 12;$$

среднее число 2-мерных граней равно

$$\frac{2N_2}{N_3} = \frac{2(3N_0 + \text{число плоскостей})}{N_0 + \text{число плоскостей}} \to 6,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 6. Казалось бы, в этом рассуждении не используется, что рассматривается конфигурация именно плоскостей. Однако это не совсем так. Дело в том, что в случае не плоскостей, а произвольных (замкнутых) поверхностей области, на которые будет разбито пространство, могут оказаться не клетками. Например, может получиться область, имеющая две 2-мерные грани, пересекающиеся по линии, являющейся окружностью (а не ребром, соединяющим вершины), и без вершин, причем таких областей может оказаться сколь угодно много. Поэтому задача о среднем числе вершин, ребер, 2-мерных граней становится бессмысленной, во всяком случае, нуждается в уточнении.

Замечание 7. В последнем доказательстве была использована трехмерная формула Эйлера: $N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 0$. Из двумерной формулы Эйлера вытекает еще одно соотношение для чисел N_0, N_1, N_2, N_3, справедливое для конфигураций (проективных) плоскостей в трехмерном проективном пространстве. Оно получается следующим способом.

Обозначим через N_0, N_1, N_2, N_3 количества вершин, ребер, 2-мерных клеток, 3-мерных клеток соответственно. Обозначим через $l(i_0, i_1, i_2)$ число 3-мерных клеток (областей, на которые разбивается проективное пространство плоскостями), имеющих i_0 вершин, i_1 ребер, i_2 граней (2-мерных клеток). Так как к каждой вершине примыкают (сходятся в ней) восемь 3-мерных клеток, то

$$\sum l(i_0, i_1, i_2) i_0 = 8N_0$$

(здесь и далее суммы берутся по i_0, i_1, i_2). Поскольку к каждому ребру примыкают четыре 3-мерные клетки, то

$$\sum l(i_0, i_1, i_2) i_1 = 4N_1.$$

Так как к каждой 2-мерной грани примыкают две 3-мерные клетки, то

$$\sum l(i_0, i_1, i_2) i_2 = 2N_2.$$

Далее, очевидно,

$$\sum l(i_0, i_1, i_2) = N_3.$$

В силу двумерной формулы Эйлера $i_2 = 2 + i_1 - i_0$. Отсюда

$$2N_2 = 2N_3 + 4N_1 - 8N_0, \quad \text{т. е.} \quad 4N_0 - 2N_1 + N_2 - N_3 = 0. \tag{1}$$

Заметим, что из этой формулы и из соотношения $6N_0 = 2N_1$, вытекающего из того, что из каждой вершины выходят шесть ребер, а каждое ребро соединяет две вершины, легко следует трехмерная формула Эйлера: $N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 0$.

Формулы, аналогичные (1), можно вывести и в случае бо́льших размерностей пространства. Однако из таких формул формула Эйлера не вытекает.

Замечание 8. Замечание, аналогичное предыдущему, справедливо и для «общих» трехмерных сетей в трехмерном проективном пространстве, т. е. для клеточных разбиений трехмерного проективного пространства, в каждой вершине которых сходятся четыре ребра, шесть 2-мерных граней и четыре 3-мерные клетки. В этом случае к каждому ребру примыкают три 3-мерные клетки. Поэтому для таких трехмерных сетей

$$\begin{aligned} &\sum l(i_0, i_1, i_2) i_0 = 4N_0, && \sum l(i_0, i_1, i_2) i_1 = 3N_1, \\ &\sum l(i_0, i_1, i_2) i_2 = 2N_2, && \sum l(i_0, i_1, i_2) \ = \ N_3. \end{aligned}$$

Отсюда и из двумерной формулы Эйлера $i_0 - i_1 + i_2 = 2$ получаем:

$$4N_0 - 3N_1 + 2N_2 - 2N_3 = 0. \tag{2}$$

Эта формула — аналог (1).

Заметим, что поскольку в этом случае в каждой вершине сходятся четыре ребра, то $4N_0 = 2N_1$. Отсюда и из (2) тоже выводится трехмерная формула Эйлера: $N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 0$.

Замечание 9. Замечания 7 и 8 очень схожи. Тем не менее, в отличие от конфигураций, образованных плоскостями в $\mathbb{RP}^3$, для «общих» трехмерных сетей, описанных в замечании 8, средних значений для чисел вершин, ребер и 2-мерных граней найти не удалось, получены только два линейных соотношения между этими средними. Мне кажется, что таких средних значений и нельзя вычислить. Это, наверное, связано с тем, что «общих» трехмерных сетей в каком-то смысле «много больше», чем сетей, полученных из пересечения семейства двумерных замкнутых поверхностей; «многообразие» «общих» сетей имеет бóльшую «размерность».

[1] Из «любительских задач» А. Д. Сахарова. *Квант*, 1991, № 5, 11–12.

[2] Леонтович А. М., Маресин В. М., Огарышев В. Ф., Филиппов В. Б. Модели образования однослойной ткани. В кн.: Теоретические и математические аспекты морфогенеза. М.: Наука, 1987, 182–198.

А. М. Леонтович

1990-12

Особенно полезно рассматривать указанное множество в случае функций из какого-нибудь важного конечномерного функционального пространства $\mathcal{F}$. (Точнее, надо рассмотреть границу пересечения соответствующего конуса с единичной сферой в $\mathcal{F}$ и одновременно границу двойственного конуса в $\mathcal{F}^\vee$.) Это дает много забавных результатов о порядковых комплексах важных подмножеств в M.

Пример 1. Если $M = \mathbb{S}^1$ и $\mathcal{F} = \{$многочлены Фурье степени $\leqslant k\}$, получаем следующую теорему Каратеодори: объединение всех $(k-1)$-мерных симплексов в $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2k$, вершины которых лежат на вложенной общим образом окружности, гомеоморфно S^{2k-1}.

Пример 2. Если $M = \mathbb{R}^n$, а $\mathcal{F} = \{$квадратичные формы$\}$, получаем следующую теорему: порядковый комплекс всех собственных подпространств в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфен $S^{(n^2+n-4)/2}$ (при $n = 3$ см. [1]; при любом n, а также над полем $\mathbb{C}$ и телом $\mathbb{H}$, см. [2]).

[1] Арнольд В. И. Разветвленное накрытие $\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \to S^4$, гиперболичность и проективная топология. *Сиб. матем. ж.*, 1988, **29**(5), 36–47. [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 431–448.]

[2] Васильев В. А. Геометрическая реализация гомологий классических групп Ли и комплексы, S-двойственные к флаговым многообразиям. *Алгебра и анализ*, 1991, **3**(4), 113–120.

В. А. Васильев

1990-14

См. теорию контактных (ко)гомологий и инвариантов лежандровых узлов Ю. В. Чеканова и Я. М. Элиашберга – Г. Хофера.

Б. А. Хесин

1990-16

«Размазанное» число зацепления кривых — это асимптотический инвариант Хопфа [1] (или спиральность) бездивергентного векторного поля, см. работу [2], а также обзор в книге [3].

[1] Арнольд В. И. Асимптотический инвариант Хопфа и его приложения. В кн.: Материалы Всесоюзной школы по дифференциальным уравнениям с бесконечным числом независимых переменных и по динамическим системам с бесконечным числом степеней свободы (Дилижан, 21 мая – 3 июня 1973 г.). Ереван: АН Армянской ССР, 1974, 229–256. [*Перепечатано с добавлениями в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 215–236.] [*Английское издание*: *Selecta Math. Sov.*, 1986, **5**(4), 327–345.]

[2] Verjovsky A., Vila Freyer R. F. The Jones–Witten invariant for flows on a 3-dimensional manifold. *Commun. Math. Phys.*, 1994, **163**(1), 73–88.

[3] Arnol′d V. I., Khesin B. A. Topological Methods in Hydrodynamics. New York: Springer, 1998. (Appl. Math. Sci., 125.) [*Перевод на русский язык*: Арнольд В. И., Хесин Б. А. Топологические методы в гидродинамике. М.: ФАЗИС, готовится к изданию.]

Б. А. Хесин

1990-17

Это задача из статьи [1] (§ 1, р. 1).

[1] Arnol'd V. I. Ten problems. In: Theory of Singularities and its Applications. Editor: V. I. Arnol'd. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990, 1–8. (Advances in Soviet Math., 1.)

1990-18

Это задача из статьи [1] (§ 2, p. 2).

[1] Arnol'd V. I. Ten problems. In: Theory of Singularities and its Applications. Editor: V. I. Arnol'd. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990, 1–8. (Advances in Soviet Math., 1.)

См. комментарий к задаче *1989-3*.

1990-19

Это задача из статьи [1] (§ 3, p. 2).

[1] Arnol'd V. I. Ten problems. In: Theory of Singularities and its Applications. Editor: V. I. Arnol'd. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990, 1–8. (Advances in Soviet Math., 1.)

1990-20

Это задача из статьи [1] (§ 4, p. 3).

[1] Arnol'd V. I. Ten problems. In: Theory of Singularities and its Applications. Editor: V. I. Arnol'd. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990, 1–8. (Advances in Soviet Math., 1.)

См. комментарии к задаче *1988-6*.

1990-21

Это задача из статьи [1] (§ 4, p. 3).

[1] Arnol'd V. I. Ten problems. In: Theory of Singularities and its Applications. Editor: V. I. Arnol'd. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990, 1–8. (Advances in Soviet Math., 1.)

См. комментарии к задаче *1988-6*.

1990-22

Это задача из статьи [1] (§ 5, p. 4).

[1] Arnol′d V. I. Ten problems. In: Theory of Singularities and its Applications. Editor: V. I. Arnol′d. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990, 1–8. (Advances in Soviet Math., 1.)

1990-23

Это задача из статьи [1] (§ 6, p. 4).

[1] Arnol′d V. I. Ten problems. In: Theory of Singularities and its Applications. Editor: V. I. Arnol′d. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990, 1–8. (Advances in Soviet Math., 1.)

1990-24

Это задача из статьи [1] (§ 7, p. 5).

[1] Arnol′d V. I. Ten problems. In: Theory of Singularities and its Applications. Editor: V. I. Arnol′d. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990, 1–8. (Advances in Soviet Math., 1.)

1990-25

Это задача из статьи [1] (§ 7, p. 5).

[1] Arnol′d V. I. Ten problems. In: Theory of Singularities and its Applications. Editor: V. I. Arnol′d. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990, 1–8. (Advances in Soviet Math., 1.)

1990-26

Это задача из статьи [1] (§ 8, p. 5).

[1] Arnol′d V. I. Ten problems. In: Theory of Singularities and its Applications. Editor: V. I. Arnol′d. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990, 1–8. (Advances in Soviet Math., 1.)

См. комментарий к задаче *1987-7*.

1990-27

Это задача из статьи [1] (§ 9, p. 6).

[1] Arnol′d V. I. Ten problems. In: Theory of Singularities and its Applications. Editor: V. I. Arnol′d. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990, 1–8. (Advances in Soviet Math., 1.)

См. комментарий к задаче *1987-14*.

1990-28

Это задача из статьи [1] (§ 10, p. 7).

[1] Arnol′d V. I. Ten problems. In: Theory of Singularities and its Applications. Editor: V. I. Arnol′d. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990, 1–8. (Advances in Soviet Math., 1.)

1991

1991-2

Предлагается следующая простейшая комплексификация чисел Эйлера–Бернулли E_n. Заметим, что E_n — это число вещественных многочленов степени $n+1$ (со старшим коэффициентом 1 и с нулевой суммой корней) с заданными простыми (вещественными) критическими значениями. Тогда комплексификация E_n — это число комплексных многочленов степени $n+1$ (со старшим коэффициентом 1 и с нулевой суммой корней) с заданными простыми (комплексными) критическими значениями. Оно равно $(n+1)^{n-1}$, т. е. кратности отображения Ляшко–Лойенги (ср. задачи *1995-1*, *1995-2*, *1996-8* и *1996-13*).

Кратность отображения Ляшко–Лойенги (в комплексном случае) известна также для вырожденных стратов, когда критические значения не просты. В вещественном случае кратность зависит от порядка критических значений на вещественной прямой. Для некоторых стратов мне известна сумма кратностей по всевозможным порядкам. В коразмерности 1 ответ есть E_n для каустики и $(n-2)E_n/2$ для страта Максвелла. Как эти кратности распределяются между различными порядками, мне неизвестно.

Д. А. Звонкин

1991-3

Это задача из статьи [1] (p. 261).

[1] Arnol′d V. I. Problems on singularities and dynamical systems. In: Developments in Mathematics: the Moscow School. Editors: V. I. Arnol′d and M. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993, 251–274.

* * *

1991-3

Интервалы между номерами i нулевых членов образуют странную последовательность с быстро растущими членами уже при $n = 3$. Например, последовательность $i = 0$, 1, 3, 8 достижима, но не продолжается. Согласно Ю. В. Матиясевичу, компьютерные эксперименты (см. *Math. Rev.* **51** #5479, **54** #2576, **56** #8480, **58** #187, 80b:10013, 10015, 83k:10020) обнаружили в этом случае всего 6 нулей. Я не знаю, доказана ли ограниченность. Вопрос связан с теоремой Сколема и, следовательно, с задачами об асимптотиках пересечений и о числе циклов в динамических системах, обобщающими на многомерный случай 16-ю проблему Гильберта о предельных циклах, см. [1].

[1] Arnol′d V. I. Bounds for Milnor numbers of intersections in holomorphic dynamical systems. In: Topological Methods in Modern Mathematics. Proceedings of the symposium in honor of John Milnor's sixtieth birthday. Editors: L. R. Goldberg and A. V. Phillips. Houston, TX: Publish or Perish, 1993, 379–390.

В. И. Арнольд (1991)

* * *

1991-3

Б. Дезомм [1] доказал, что возвратная последовательность степени 3 с двумя соседними нулями, состоящая из рациональных чисел, имеет не более 6 нулей, причем 5 и 6 нулей встречаются только в трех явно описанных исключительных случаях. Ф. Бейкерс [2] доказал, что любая возвратная последовательность степени 3 имеет максимум 6 нулей.

[1] Deshommes B. Puissances binomiales dans un corps cubique. *Dissertationes Math.* (*Rozprawy Mat.*), 1991, **312**, 57 p.

[2] Beukers F. The zero-multiplicity of ternary recurrences. *Compositio Math.*, 1991, **77**(2), 165–177.

С. В. Дужин

1991-8

Гипотеза В. И. Арнольда 1991 г. о красивом ответе в этой задаче приведена в статье [1] (см. также *Math. Rev.* 97j:58144), где, в частности, получен следующий результат: если множество таких целых n, что $\dim[(A^nX) \cap Y] \geqslant 1$, бесконечно, то существуют такие целые q и r, $0 \leqslant r < q$, что $\dim[(A^{r+qk}X) \cap Y] \geqslant 1$ для любого целого k.

[1] Rosales-González E. Intersection dynamics on Grassmann manifolds. *Bol. Soc. Mat. Mexicana, Ser.* 3, 1996, **2**(2), 129–138.

М. Б. Севрюк

1991-10

Это задача из статьи [1] (p. 254).

[1] Arnol′d V. I. Problems on singularities and dynamical systems. In: Developments in Mathematics: the Moscow School. Editors: V. I. Arnol′d and M. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993, 251–274.

1991-11

Задача возникла в связи с исследованием градуированных алгебр с простейшим рядом Пуанкаре $1 + t + t^2 + \cdots$; обобщение теоремы Лагранжа опубликовано Е. И. Коркиной в статье [1]. Существование средних (для типичных трехгранных конусов) доказано М. Л. Концевичем и Ю. М. Суховым, см. [2].

[1] Korkina E. I. La périodicité des fractions continues multidimensionnelles. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1994, **319**(8), 777–780.

[2] Arnol′d V. I. Higher dimensional continued fractions. *Reg. Chaot. Dynamics*, 1998, **3**(3), 10–17.

В. И. Арнольд

1991-14

Это задача из статьи [1] (р. 255).

[1] Arnol′d V. I. Problems on singularities and dynamical systems. In: Developments in Mathematics: the Moscow School. Editors: V. I. Arnol′d and M. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993, 251–274.

1992

1992-1

Второй вопрос — это задача из статьи [1] (р. 272).

[1] Arnol′d V. I. Problems on singularities and dynamical systems. In: Developments in Mathematics: the Moscow School. Editors: V. I. Arnol′d and M. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993, 251–274.

* * *

1992-1

В приведенной постановке ответ отрицательный. Для функций трех и более переменных недостаточно требовать, чтобы индекс был равен нулю. Следует требовать стягиваемость множества $\{f \leqslant 0\}$, где $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ — рассматриваемая функция. Для конечнократных функций двух переменных (когда стягиваемость множества $\{f \leqslant 0\}$ эквивалентна тому, что индекс равен нулю) положительный ответ дал С. М. Гусейн-Заде [1–2].

[1] Гусейн-Заде С. М. О существовании деформаций без критических точек (задача Тесье для функций двух переменных). *Функц. анализ и его прилож.*, 1997, **31**(1), 74–77.

[2] Gusein-Zade S. M. On a problem of B. Teissier. In: Topics in Singularity Theory. V. I. Arnol′d's 60th Anniversary Collection. Editors: A. Khovanskiĭ, A. Varchenko and V. Vassiliev. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997, 117–125. (AMS Translations, Ser. 2, 180; Advances in Math. Sci., 34.)

С. М. Гусейн-Заде

1992-3

Это задача из статьи [1] (p. 252).

[1] Arnol′d V. I. Problems on singularities and dynamical systems. In: Developments in Mathematics: the Moscow School. Editors: V. I. Arnol′d and M. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993, 251–274.

1992-7

Это задача из статьи [1] (p. 251).

[1] Arnol′d V. I. Problems on singularities and dynamical systems. In: Developments in Mathematics: the Moscow School. Editors: V. I. Arnol′d and M. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993, 251–274.

1992-11

См. комментарий к задаче *1971-11*.

1992-12

См. комментарии к задачам *1988-6* и *1992-13*.

1992-13, а также *1989-2*, *1992-12*, *1994-47* и *1994-48*

Пусть M — компактное многообразие, $\mathrm{Diff}^r(M)$ — пространство C^r-диффеоморфизмов $M \to M$ (значение r будет уточнено ниже). Для любого диффеоморфизма $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ определим число *изолированных* периодических точек периода n как

$$P_n(f) = \#\{\text{изолированная точка } x \in M : \ f^n(x) = x\}.$$

М. Артин и Б. Мазур [1] доказали, что для плотного множества диффеоморфизмов f число периодических точек $P_n(f)$ растет не быстрее экспоненты периода n, т. е.

$$P_n(f) \leqslant e^{Cn} \text{ для всех } n \in \mathbb{Z}_+ \text{ и некоторой константы } C = C(f) > 0. \tag{1}$$

Назовем диффеоморфизмы, удовлетворяющие условию (1), *диффеоморфизмами Артина–Мазура (А-М диффеоморфизмами)*.

Артин и Мазур [1] поставили следующий вопрос: *что можно сказать о множестве А-М диффеоморфизмов, все периодические точки которых трансверсальны?*

Первый результат в этом направлении заключается в следующем.

Теорема 1 [2–3]. *Пусть $0 \leqslant r < \infty$. Тогда множество А-М диффеоморфизмов, все периодические точки которых* гиперболичны, *плотно в* $\mathrm{Diff}^r(M)$.

Это утверждение относится к более узкому классу диффеоморфизмов, чем исходный вопрос Артина и Мазура, так как каждая гиперболическая периодическая точка трансверсальна, но не наоборот.

Конечная гладкость ($r < \infty$) в теореме 1 очень существенна.

С. Смейл [4] и Р. Боуэн [5] поставили вопрос о связях между скоростью роста числа периодических точек, топологической энтропией и динамической ζ_f-функцией для типичных (по Бэру) диффеоморфизмов f, в частности, вопрос о типичности А-М диффеоморфизмов.

Напомним, что согласно стандартной терминологии подмножество топологического пространства называется *остаточным* (*residual*) по Бэру, если оно содержит счетное пересечение открытых плотных множеств, а элементы такого подмножества называются *типичными* (*generic*) по Бэру.

Второй основной результат формулируется следующим образом.

Теорема 2 [3]. *Пусть* $2 \leqslant r \leqslant \infty$. *Тогда множество А-М диффеоморфизмов* не *является* C^r*-остаточным в пространстве* $\operatorname{Diff}^r(M)$ *с равномерной* C^r*-топологией.*

Более того, существует такое открытое подмножество $U \subset \subset \operatorname{Diff}^r(M)$ *пространства* C^r*-диффеоморфизмов, что для всякой последовательности* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *найдется остаточное множество* $R_a \subset U$, *обладающее следующим свойством: для любого диффеоморфизма* $f \in R_a$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log P_n(f)}{a_n} = \infty.$$

Доказательство этого утверждения основано на теореме Гонченко–Шильникова–Тураева [6]. Препринт [3] содержит доказательства теорем 1 и 2 и подробное доказательство теоремы Гонченко–Шильникова–Тураева, в целом следующее идеям статьи [6]. С. В. Гонченко, Л. П. Шильников и Д. В. Тураев сообщили мне, что они также готовят работу с полным доказательством своей теоремы, и эта работа выйдет в сборнике трудов конференции, посвященной 90-летию со дня рождения акад. Л. С. Понтрягина (1908–1988).

Гипотетически теорема 2 верна также при $r = 1$ и $\dim M \geqslant 3$.

Согласно второй части теоремы 2, верхней оценки скорости роста числа периодических точек для топологически типичных диффеоморфизмов (т. е. диффеоморфизмов из некоторого остаточного множества) не существует. С другой стороны, остаточное подмножество евклидова пространства может иметь лебегову меру нуль (дальнейшее обсуждение этого вопроса см. в работах [7–8]).

В задачах *1992-12* и *1992-13* речь идет об экспоненциальных оценках сверху «с вероятностью 1». В частности, задачу *1992-13* можно переформулировать следующим образом: *доказать, что с вероятностью* 1 *диффеоморфизм является А-М диффеоморфизмом.*

Наш третий основной результат дает почти полное решение этой задачи.

Прежде всего, точно определим слова «с вероятностью 1». Пусть B^N — замкнутый единичный шар в $\mathbb{R}^N$. Обозначим через $\operatorname{Diff}^r(B^N)$ пространство C^r-диффеоморфизмов из B^N во внутренность B^N. Зафиксируем систему координат в $\mathbb{R}^N$. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ — мультииндекс из $\mathbb{Z}_+^N$, и $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$. Для любой точки $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ введем обозначение $x^\alpha = \prod_{i=1}^N x_i^{\alpha_i}$. Зафиксируем достаточно быстро убывающую последовательность положительных чисел $\mathrm{s} = \{s_k\}_{k=1}^\infty$ и определим гильбертов кирпич

$$\mathrm{HB}(\mathrm{s}) = \left\{\varepsilon = \{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^N} : |\varepsilon_\alpha| < s_{|\alpha|} \text{ при всех } \alpha \in \mathbb{Z}_+^N\right\}, \quad \varepsilon_\alpha \in \mathbb{R}^N \ \forall\alpha,$$

так что всякий набор $\varepsilon \in \mathrm{HB}(\mathrm{s})$ определяет аналитическую функцию

$$\phi_\varepsilon(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^N} \varepsilon_\alpha x^\alpha, \qquad \phi_\varepsilon : B^N \to \mathbb{R}^N$$

на единичном шаре B^N (обозначение HB — от “Hilbert brick”). Снабдим $\mathrm{HB}(\mathrm{s})$ естественной вероятностной мерой-произведением μ. Слова «с вероятностью 1» относятся к этой мере.

Третий основной результат заключается в следующем.

Теорема 3 [9]. *Пусть* $2 \leqslant r \leqslant \omega$. *Тогда для любого диффеоморфизма* $f \in \operatorname{Diff}^r(B^N)$, *любого* $\delta > \log_2\left(1 + \frac{3}{r-1}\right)$ *и почти всех* $\varepsilon \in \mathrm{HB}(\mathrm{s})$ *в смысле меры* μ *существует такая константа* $C = C(\varepsilon)$, *что*

$$P_n(f + \phi_\varepsilon) < \exp\bigl(Cn^{1+\delta}\bigr) \text{ для всех } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Напомним, что C^ω означает вещественную аналитичность. Теорема 3 представляет собой существенное улучшение результатов Иомдина [10].

В действительности справедливо еще более сильное утверждение. Определим для каждой периодической точки $x \in B^N$ периода n диффеоморфизма $f \in \operatorname{Diff}^r(B^N)$, $f^n(x) = x$, ее *гиперболичность* как минимальное расстояние от собственных чисел λ_j линеаризации $df^n(x)$ отображения f^n в точке x до единичной окружности:

$$\gamma_n(x, f) = \min_{j=1}^{n}\bigl||\lambda_j| - 1\bigr|.$$

Гиперболичность гиперболической периодической точки положительна. Пусть

$$\gamma_n(f) = \min_x \gamma_n(x, f),$$

где минимум берется по всем периодическим точкам периода n.

Теорема 4 [9]. *Пусть* $2 \leqslant r \leqslant \omega$. *Тогда для любого диффеоморфизма* $f \in \mathrm{Diff}^r(B^N)$, *любого* $\delta > \log_2\left(1 + \frac{3}{r-1}\right)$ *и почти всех* $\varepsilon \in \mathrm{HB}(\mathrm{s})$ *в смысле меры* μ *существует такая константа* $C = C(\varepsilon)$, *что*

$$\gamma_n(f + \phi_\varepsilon) > \exp\bigl(-Cn^{1+\delta}\bigr) \textit{ для всех } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Доказательство теоремы 4 использует новую технику возмущений диффеоморфизмов интерполяционными многочленами Ньютона.

Условие $r \geqslant 2$ в теоремах 3 и 4 очень существенно.

См. также комментарии к задаче *1988-6*.

[1] Artin M., Mazur B. On periodic points. *Ann. Math.*, *Ser.* 2, 1965, **81**(1), 82–99. [*Перевод на русский язык*: Артин М., Мазур Б. О периодических точках. *Математика* (*сборник переводов*), 1967, **11**(5), 3–20.]

[2] Kaloshin V. Yu. An extension of the Artin–Mazur theorem. *Ann. Math.*, *Ser.* 2 (submitted).

[3] Kaloshin V. Yu. Generic diffeomorphisms with superexponential growth of number of periodic orbits. Preprint, Stony Brook IMS Preprint Series, # 99/2 (1999).

[4] Smale S. Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1967, **73**(6), 747–817. [*Перевод на русский язык*: Смейл С. Дифференцируемые динамические системы. *Успехи матем. наук*, 1970, **25**(1), 113–185.]

[5] Bowen R. On Axiom A Diffeomorphisms. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1978. (Regional Conference Series in Mathematics, 35.)

[6] Gonchenko S. V., Shil′nikov L. P., Turaev D. V. On models with nonrough Poincaré homoclinic curves. *Physica D*, 1993, **62**(1–4), 1–14.

[7] Hunt B. R., Sauer T., Yorke J. A. Prevalence: a translation-invariant “almost every” on infinite-dimensional spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* (*N. S.*), 1992, **27**(2), 217–238; addendum: 1993, **28**(2), 306–307.

[8] Калошин В. Ю. Некоторые превалентные свойства гладких динамических систем. *Труды МИРАН им. В. А. Стеклова*, 1997, **213**, 123–151.

[9] Hunt B. R., Kaloshin V. Yu. Growth of the number of periodic points for prevalent diffeomorphisms and Newton interpolation polynomials (in preparation).

[10] Yomdin Y. A quantitative version of the Kupka–Smale theorem. *Ergod. Theory Dynam. Syst.*, 1985, **5**(3), 449–472.

В. Ю. Калошин

1992-14

Это задача из статьи [1] (p. 266).

[1] Arnol′d V. I. Problems on singularities and dynamical systems. In: Developments in Mathematics: the Moscow School. Editors: V. I. Arnol′d and M. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993, 251–274.

См. комментарии к задаче *1988-6*.

1992-15

Это задача из статьи [1] (p. 252).

[1] Arnol′d V. I. Problems on singularities and dynamical systems. In: Developments in Mathematics: the Moscow School. Editors: V. I. Arnol′d and M. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993, 251–274.

1993

1993-1

См. комментарий к задаче *1993-25*.

1993-3

R. Uribe утверждает (Варшава, июнь 1998 г.), что указанная поверхность модулей не имеет.

В. Д. Седых

1993-6

Одной из основных работ в этой области, наряду со статьей, указанной в условии задачи, является работа [1].

[1] Fintushel R., Stern R. J. Instanton homology of Seifert fibred homology three spheres. *Proc. London Math. Soc., Ser.* 3, 1990, **61**(1), 109–137.

С. В. Чмутов

1993-10

Для класса St задача решена совместно С. Л. Табачниковым и С. В. Чмутовым (1995, не опубликовано). Решение алгоритмическое и из него ясен рост указанной функции. Она растет не быстрее линейной функции от n.

С. В. Чмутов

1993-11

Вместо комментария я предпочел бы привести более точную переформулировку задачи.

Известно, что элементы цепных дробей удовлетворяют статистике Гаусса, задаваемой инвариантной мерой эндоморфизма $x \mapsto 1/x - [1/x]$ интервала $(0;1)$ в себя. Справедливо ли это для *периодических* цепных дробей (т. е. цепных дробей чисел, являющихся корнями квадратных уравнений с целыми коэффициентами)?

Мера на множестве периодических цепных дробей может задаваться, например, следующими способами.

A) Можно рассмотреть случайные матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ из $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ или $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ с целыми элементами a, b, c, d, лежащими внутри шара радиуса R, т. е. при $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leqslant R^2$, с равномерной мерой на этом шаре, раскладывать в цепные дроби собственные числа этих матриц и изучать

а) статистику элементов этих периодических цепных дробей;

б) статистику длину периода.

Существует ли предел функции распределения элементов этих цепных дробей при $R \to \infty$ и совпадает ли он с гауссовой статистикой?

Верно ли, что этот предел не изменится, если вместо расширяющихся шаров брать совокупность подобно расширяющихся произвольных областей?

Б) Можно рассматривать случайные квадратные трехчлены $\lambda^2 + a\lambda + b$ (с вещественными корнями) с коэффициентами в области $a^2 + b^2 \leqslant R^2$ из $\mathbb{Z}^2$ (т. е. с целыми a, b) и исследовать статистику элементов цепных дробей, в которые раскладываются корни этих трехчленов (области тоже можно брать не кругами, а, например, квадратами $|a| \leqslant R$, $|b| \leqslant R$), $R \to \infty$. Ответ здесь предположительно также гауссов.

В) Можно даже начинать с рациональных дробей p/q, раскладывать их в конечные цепные дроби и искать предельную статистику элементов этих дробей в круговой области $p^2 + q^2 \leqslant R^2$ при $R \to \infty$ (круги опять же можно заменить другими подобно расширяющимися областями). Предположительно и здесь ответ дается гауссовой статистикой.

А. М. Леонтович

* * *

1993-11

В 1997–98 гг. очень сильные результаты в этом направлении (причем для многомерного случая) были получены М. Л. Концевичем и Ю. М. Суховым, см. [1].

[1] Arnol′d V. I. Higher dimensional continued fractions. *Reg. Chaot. Dynamics*, 1998, **3**(3), 10–17.

М. Б. Севрюк

1993-12

Конструкции Д. Сирсмы, вероятно, дают (хотя бы в простейших случаях, когда $\dim_{\mathbb{C}} T^* F_{n+1} = 4$) определение естественных «монодромий на ∞», соответствующих неизолированной особенности прообраза многочлена с кратным корнем. Иными словами, в этих конструкциях должен быть заготовлен набор понятий (может быть, неполный), а надо *вычислить*, чему эти объекты равны в нашем случае.

В качестве замечания добавлю, что, по-видимому, связность, сохраняющая собственные направления при движении собственных чисел, никак не может быть симплектической (иметь симплектическую монодромию), и вот почему. Рассмотрим частный случай, когда собственные числа — корни степени $n+1$ из 1. Пусть A — матрица с разными собственными числами, $A^{n+1} = E$. На этой орбите лежит также A^k (пусть $n+1$ простое). Симплектическая структура $\Omega([A\omega_1],[A\omega_2]) = A \mid [\omega_1,\omega_2]$ при *входящем в нашу группу монодромии связности «отображении Галуа»* $A \mapsto A^k$ переходит в $A^k \mid [\omega_1,\omega_2]$ (это следует из забавного вычисления: $(A+\varepsilon[A,\omega])^k = A^k + \varepsilon[A^k,\omega] + O(\varepsilon^2)$, так как из $2k$ слагаемых $A^i(A\omega - \omega A)A^{k-i}$ остаются только два крайних члена). Теперь, если диагональные элементы $[\omega_1,\omega_2]$ — это $\overline{\varkappa}_i$, то несохранение Ω следует из $\sum \varkappa_i\lambda_i \neq \sum \varkappa_i\lambda_i^k$. Все это видно уже в $\mathrm{SL}(2)$, где $\Omega \mapsto -\Omega$ при перестановке корней λ и $-\lambda$.

В. И. Арнольд (1993)

1993-13

Отметим смежную задачу. В статье [1] для A_μ и D_μ в $\mathbb{C}^2$ доказано, что отображение $\pi_1(\mathbb{C}^\mu \setminus \Sigma) \to \pi_0(\mathrm{Diff}(V,\partial V))$ не имеет ядра. Верно ли это для надстроек в $\mathbb{C}^n$? Для E_k? Для непростых особенностей? (Я думал всегда, что верно.)

[1] Perron B., Vannier J.-P. Groupe de monodromie géométrique des singularités simples. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1992, **315**(10), 1067–1070.

В. И. Арнольд (1993)

1993-17

Если нет, то это хорошая задача для Кванта. Вот ее решение:

Лемма. *$\forall$ целого x, $0 < x < p$, $\exists$ такое целое $Y(x)$, что $xY \equiv 1 \mod p^p$.*

Доказательство. Так как p простое, то $\exists$ такое целое y, что $xy = 1 + pz$ (z целое). Введем обозначение $pz = Z$. Так как p нечетное, то $Z^p + 1 = (1 + Z)(Z^{p-1} - Z^{p-2} + \cdots + 1)$. Значит, $xy(Z^{p-1} - Z^{p-2} + \cdots + 1) \equiv 1 \mod p^p$ и лемма доказана с $Y = y(Z^{p-1} - Z^{p-2} + \cdots + 1)$.

Доказательство утверждения. $i(i-1)\cdots(i-x+1)$ есть многочлен с целыми коэффициентами степени x. Знаменатель же в C_i^x обратим по модулю p^p согласно лемме: $\frac{1}{x!} \equiv \Pi := \prod_{1 \leqslant \xi \leqslant x} Y(\xi) \mod p^p$, где $Y(\xi)$ целые при $\xi < p$; итак, $C_i^x \equiv \Pi \cdot i(i-1)\cdots(i-x+1) \mod p^p$.

Еще задача для Кванта: (торы $T_{a \times b}$ $\forall a, b$ покрываются прямоугольниками $m \times 1$ и $1 \times n$, если и только если a кратно m или b кратно n) $\iff$ $(m = p^k, n = p^l$, p простое), см. статью [1].

[1] Remila É. Sur le pavage de tore $T_{a \times b}$ par h_m et v_n. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1993, **316**(9), 949–952.

В. И. Арнольд (1993)

1993-20

Р. Финтушель и Р. Стерн [1] определяют гомологии Флоера с *целочисленной* (а не mod 8) градуировкой, но ответы всё равно никак не «укладываются» ни в какие многогранники Ньютона (т. е. с многогранником надо, видимо, делать что-то весьма нетривиальное). Например, они получили для сумм степеней такие многочлены Пуанкаре:

2 3 5	$t + t^5$	1 0 1
2 3 11	$t + t^3 + t^5 + t^7$	1 1 1 1
2 3 17	$t + t^3 + 2t^5 + t^7 + t^9$	1 1 2 1 1
2 3 23	$t + 2t^3 + 2t^5 + 2t^7 + t^9$	1 2 2 2 1
2 3 29	$t + t^3 + 3t^5 + 2t^7 + 2t^9 + t^{11}$	1 1 3 2 2 1
2 3 35	$t + 2t^3 + 3t^5 + 3t^7 + 2t^9 + t^{11}$	1 2 3 3 2 1
2 3 41	$t + t^3 + 4t^5 + 3t^7 + 3t^9 + 2t^{11}$	1 1 4 3 3 2
2 3 47	$t + 2t^3 + 3t^5 + 4t^7 + 3t^9 + 2t^{11} + t^{13}$	1 2 3 4 3 2 1
2 3 53		1 1 4 4 4 3 1
2 3 59		1 2 3 5 4 3 2
2 3 65		1 1 4 5 5 4 2
2 3 71		1 2 3 5 5 4 3 1

2 3 7	$1t^{-1}+0t+1t^3$
13	$1t^{-1}+1t+1t^3+1t^5$
19	2 1 2 1
25	2 2 2 2
31	2 2 3 2 1
37	1 3 3 2 1
43	1 4 4 4 3
49	2 3 5 4 3 1
3 4 13	$t^{-5}+2t^{-3}+3t^{-1}+2t+2t^3$
4 5 21	$4t^{-9}+5t^{-7}+8t^{-5}+6t^{-3}+5t^{-1}+t+t^3$
5 6 31	$2t^{-15}+10t^{-13}+11t^{-11}+15t^{-9}+3t^{-7}+8t^{-5}+$ $+5t^{-3}+4t^{-1}+t+t^3$
2 3 39	$2t^{-1}+3t+4t^3+4t^5+3t^7$

Что это за числа? Неужели невозможно догадаться (я бы попытался что-то узнать про асимптотику в серии $[2,3,6k-1]$, $k\to\infty$)?

Но если у Финтушеля–Стерна более или менее описано, как считать, то статья [2], кажется, еще не позволяет вычислять ответы.

[1] Fintushel R., Stern R. J. Integer graded instanton homology groups for homology three-spheres. *Topology*, 1992, **31**(3), 589–604.

[2] Lescop C. Sur l'invariant de Casson–Walker: formule de chirurgie globale et généralisation aux variétés de dimension 3 fermées orientées. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1992, **315**(4), 437–440.

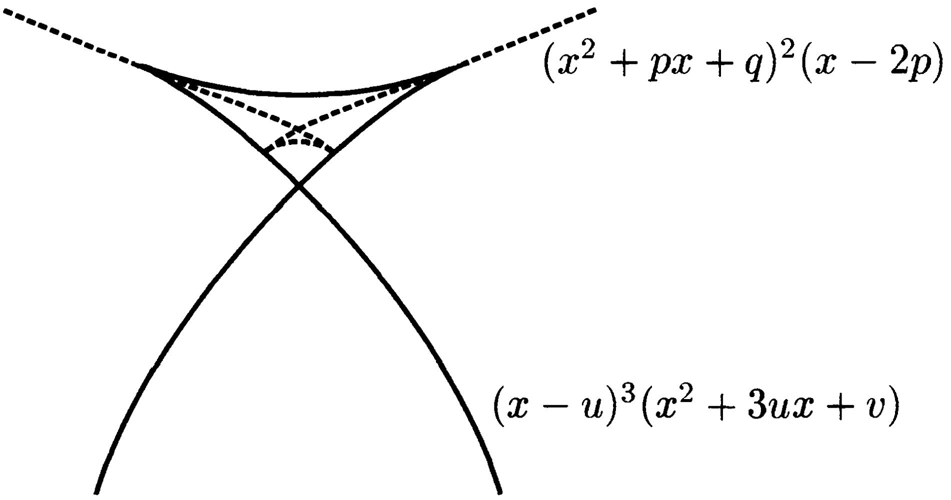
В. И. Арнольд (1993)

1993-24

Наблюдение 1 ([1], p. 39, 81 (с. 54, 105 русского издания) и Fig. 28). Страт Максвелла A_4, как и каустика — ласточкин хвост (рис. 1).

А. Б. Гивенталь (в статье с А. Н. Варченко [2] об отображении периодов) обобщил это наблюдение на многомерный случай особенностей A_{2k} для любого k — многообразия многочленов с большим числом двукратных корней и с корнем большой кратности диффеоморфны и даже лагранжево эквивалентны:

$$\{(x^a+p_1x^{a-1}+\cdots+p_a)^2(x-2p_1)\}\sim$$
$$\sim\{(x-u)^{a+1}(x^a+(a+1)ux^{a-1}+v_1x^{a-2}+\cdots+v_{a-1})\}.$$



$$\{x^5+ax^3+bx^2+cx+d=(x^2+px+q)^2(x-2p)=(x-u)^3(x^2+3ux+v)\}$$

Рис. 1. Сечение плоскостью $a=-1$ каустики (сплошная линия) и стратов Максвелла (пунктир) семейства $x^5+ax^3+bx^2+cx$ (свободный член d забыт)

Наблюдение 2 ([1], p. 141–142 (с. 185–186 русского издания) и Fig. 91). Для B_4 (или C_4) каустика и страт Максвелла тоже диффеоморфны (аналогичное утверждение для особенностей B_{2k} и C_{2k} при любом k доказано Ф. Наполитано [3]). В случае C_4 (рис. 2) речь идет о семействе функций

$$C_4 \sim \{f+ax^3+by^2+cy,\ f=x^4+xy,\ \text{край } x=0\},$$

$$\text{каустика: } \{y^4+ay^3+by^2+cy \text{ с неморсовской критической точкой } (A^2) \text{ или нулевой } (C_2)\},$$

$$\text{страт Максвелла: } \begin{cases} A_1A^1, & \text{совпадение граничного и внутреннего критических значений,} \\ 2A^1, & \text{совпадение двух граничных критических значений.} \end{cases}$$

Имеем:

$$\frac{A^2}{C_2}=\frac{A^1A_1}{2A^1}. \quad \text{В сечении } a=\mathrm{const}.$$

Многомерное обобщение находится вблизи средней размерности, где многообразия могут быть лежандровыми или лагранжевыми.

Ср. также задачи *1985-24* и *1996-4*.

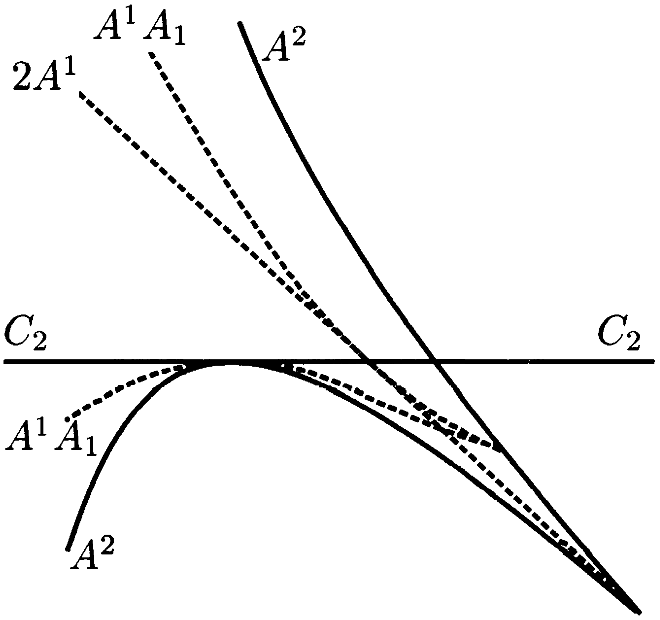


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма краевой особенности C_4. Компоненты каустики показаны сплошными линиями, страты Максвелла — пунктиром

[1] Arnol′d V. I. Singularities of Caustics and Wave Fronts. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990. (Math. Appl., Soviet Ser., 62.) [*Русское издание*: Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996.]

[2] Варченко А. Н., Гивенталь А. Б. Отображение периодов и форма пересечений. *Функц. анализ и его прилож.*, 1982, **16**(2), 7–20.

[3] Napolitano F. Duality between the generalized caustic and Maxwell stratum for the singularities B_{2k} and C_{2k}. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1997, **325**(3), 313–317.

В. И. Арнольд

1993-25, а также *1993-1*

Почти комплексным многообразием называется пара (M^{2n}, J), где поле операторов $J \in T^*M \otimes TM$ удовлетворяет условию $J^2 = -\mathbf{1}$. Подмногообразие $N \subset M$ называется *псевдоголоморфным*, если его касательное расслоение $TN \subset TM$ инвариантно относительно оператора J. В общем случае почти комплексное многообразие не имеет псевдоголоморфных подмногообразий N размерности $\dim N > 2$. Препятствием к этому является *тензор Ниенхейса*, не обнуляющийся на подпространствах касательных пространств размерности $\geqslant 4$. Поэтому при исследовании почти комплексных многообразий M возникают *псевдоголоморфные кривые* $N^2 \subset M^{2n}$.

Впервые такие кривые появились в работе [1], где доказано существование малого *псевдоголоморфного диска* $u\colon (D^2_\varepsilon, J_0) \to (M^{2n}, J)$, $u(0) = p$, $u_*(0)e = v \in T_pM$ через любую точку p в заданном направлении v, где $e \in T_0D^2_\varepsilon \simeq \mathbb{C}$ — единичный вектор. Заметим, что в почти комплексных многообразиях не только малые псевдоголоморфные диски возникают в семействах. Каждый большой псевдоголоморфный диск $u\colon D_R \to M^{2n}$ имеет в своей окрестности псевдоголоморфные диски почти таких же размеров $\tilde{u}\colon D_{R-\varepsilon} \to M^{2n}$ в близких направлениях [2].

Первые результаты о компактных псевдоголоморфных кривых получены в работе М. Л. Громова [3], где показано, что при некоторых условиях общности на почти комплексную структуру J и положительности на гомологический класс $A \in H^2(M)$ *псевдоголоморфные сферы* $u\colon S^2 \to M^{2n}$ класса A появляются в семействах, имеющих структуру конечномерного гладкого многообразия [4].

Вопрос задачи касается *псевдоголоморфных торов* $\mathbb{T}^2 \subset M^{2n}$. Уже в комплексной ситуации [5–6] такие торы встречаются дискретным образом. Каким образом можно определить дискретность данного псевдоголоморфного тора? В [5] и [6] (§ 27) В. И. Арнольд связывает с каждым голоморфным тором (эллиптической кривой) в комплексной поверхности пару чисел (λ, ω). В случае, если эта пара нерезонансна, в окрестности кривой нет других гомологичных ей эллиптических кривых. Важно отметить, что такая пара не возникает автоматически в почти комплексном случае. Точнее, число ω является инвариантом структуры J, ограниченной на тор $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^2(2\pi, \omega)$, а λ в комплексном случае задает правило склейки карт нормального расслоения. В отличие от риманова случая нормальное расслоение, упоминаемое в [5–6] в комплексной ситуации, зависит не от 0-струи, а от 1-струи структуры на подмногообразии (здесь структуры комплексного умножения суть J_0 или i). В почти комплексном случае 1-струя структуры J на подмногообразии $\mathbb{T}^2 \subset M^{2n}$ задается тензором Ниенхейса [7] вдоль подмногообразия, и одного инварианта λ недостаточно для характеристики этой 1-струи.

Таким образом, рассмотрение 1-струи почти комплексной структуры J приводит к изучению поля тензоров Ниенхейса N_J вдоль псевдоголоморфного тора $\mathbb{T}^2 \subset (M^4, J)$. Такое поле представляет из себя произвольное поле J-антилинейных кососимметрических $(2,1)$-тензоров [7]. Поэтому нельзя ожидать канонической нормальной формы ростка структуры J в координатах, аналогично полученному представлению для комплексной структуры в [5–6]. Это особенно хорошо видно, если рассмотреть 2-струю почти комплексного оператора на торе $\mathbb{T}^2$. Действительно, изучение структуры тензора Ниенхейса в размерности 4 показывает, что с невырожденным полем тензоров N_J на M^4 связано распределение $\Pi^3 \subset TM$ с трансверсальной мерой [7]. Пересечение этого распределения с касательным пространством тора $\mathbb{T}^2$ дает слоение тора с трансверсальной мерой. В частности, возникают число вращения и пара инвариантных функций. Итак, ростки окрестностей почти комплексных торов имеют естественные модули. Именно в терминах инвариантов, возникающих на этом пути, и требуется искать препятствия к деформации псевдоголоморфных торов.

Упомянутая в условии задачи работа Ю. Мозера [8] рассматривает теорию типа КАМ для псевдоголоморфных слоений почти комплексного тора $\mathbb{T}^{2n}$. Понятно, что слоений на псевдоголоморфные торы может не существовать (отметим, однако, результаты С. Б. Куксина [9] о существовании псевдоголоморфных торов фиксированного гомологического класса для определенных типов структур J). Поэтому Мозер рассматривает слоения тора $(\mathbb{T}^4, J)$ псевдоголоморфными линиями $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{T}^4$. Его результат утверждает, что при малом возмущении J стандартной комплексной структуры J_0 большинство слоев выделенного слоения $u_\alpha\colon \mathbb{C} \to \mathbb{T}^4$ выживают, т. е. деформируются в псевдоголоморфные линии для структуры J.

Мозер ставит вопрос, до какого предела верна его теория. Частичным ответом является теорема Бангерта [10], в которой доказывается, что некоторые слои выживают, если возмущение таково, что новая структура J подчинена стандартной симплектической форме ω_0, т. е. $\omega_0(X, JX) > 0$ для любого вектора $X \neq 0$. Другими словами, доказывается существование нетривиальных отображений комплексных линий $u\colon \mathbb{C} \to (\mathbb{T}^{2n}, J)$ для подчиненных структур J. Бангерт использует лемму Броди о перепараметризации. В комплексном анализе эта лемма применяется для получения критерия гиперболичности многообразий. Соответствующая теория для почти комплексных многообразий была построена в работе [11]. В журнальном варианте работы приводится другое доказательство теоремы Бангерта, которое с помощью аналога комплексного критерия Броди может быть переформулировано как негиперболичность $(\mathbb{T}^{2n}, J)$. Конструкция позволяет «увидеть» направление построенной кривой $u(\mathbb{C})$. Более того, таких направлений столько же, сколько и голоморфных торов $\mathbb{T}^2$ в стандартном комплексном торе $(\mathbb{T}_0^{2n}, J_0) = \mathbb{C}^n/\mathbb{Z}^{2n}$. Другими словами, получается более общая теорема, которая утверждает существование целой псевдоголоморфной кривой $u\colon \mathbb{C} \to (\mathbb{T}^{2n}, J)$ через любую точку для каждой J_0-инвариантной решетки $\mathbb{Z}^2 \subset H_2(\mathbb{T}_0^{2n}; \mathbb{Z})$, причем различным направлениям отвечают различные линии.

Применяя аналогичную технику к исследованию окрестности псевдоголоморфного тора $\mathbb{T}^2 \subset (M^4, J)$, можно показать, что эта окрестность расслаивается на псевдоголоморфные цилиндры. Более того, это слоение можно выбрать эквивалентным голоморфному слоению окрестности эллиптической кривой в комплексной поверхности, заданной в канонических координатах Арнольда (r, φ) уравнением $r = \mathrm{const}$. Это является одним из обобщений теории типа Флоке (см. [6], § 26) на почти комплексный случай. Заметим однако, что при попытке ввести комплексные координаты даже на отдельно взятой псевдоголоморфной трансверсали к тору возникают интересные вопросы монодромии данного псевдоголоморфного слоения, которые отсутствуют в комплексной ситуации.

Сказанное выше относилось, главным образом, к окрестностям с нулевым самопересечением тора $\mathbb{T}^2 \cdot \mathbb{T}^2 = 0$. В случае отрицательного самопересечения невозможность деформации кривой следует из положительности пересечений псевдоголоморфных кривых [3–4]. Теорема Грауерта в буквальной форме не верна, она требует изменений в духе обсуждения выше. Для положительных окрестностей ($\mathbb{T}^2 \cdot \mathbb{T}^2 > 0$) теорема Римана–Роха предсказывает существование деформаций псевдоголоморфных торов, но это пока остается гипотезой.

[1] Nijenhuis A., Woolf W. B. Some integration problems in almost-complex and complex manifolds. *Ann. Math., Ser. 2*, 1963, **77**(3), 424–489.

[2] Кругликов Б. С. Существование близких псевдоголоморфных дисков для почти комплексных многообразий и приложение к псевдонорме Кобаяси–Ройдена. *Функц. анализ и его прилож.*, 1999, **33**(1), 46–58.

[3] Gromov M. L. Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.*, 1985, **82**(2), 307–347.

[4] McDuff D., Salamon D. J-holomorphic Curves and Quantum Cohomology. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994. (University Lecture Series, 6.)

[5] Арнольд В. И. Бифуркации инвариантных многообразий дифференциальных уравнений и нормальные формы окрестностей эллиптических кривых. *Функц. анализ и его прилож.*, 1976, **10**(4), 1–12. [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 269–287.]

[6] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[7] Кругликов Б. С. Тензоры Ниенхейса и препятствия к построению псевдоголоморфных отображений. *Матем. заметки*, 1998, **63**(4), 541–561.

[8] Moser J. On the persistence of pseudo-holomorphic curves on an almost complex torus (with an appendix by Pöschel J.). *Invent. Math.*, 1995, **119**(3), 401–442.

[9] Kuksin S. B. Pseudoholomorphic 2-tori in $\mathbb{T}^4$. *Differential Geom. Appl.*, 1996, **6**(2), 109–119.

[10] Bangert V. Existence of a complex line in tame almost complex tori. *Duke Math. J.*, 1998, **94**(1), 29–40.

[11] Kruglikov B. S., Overholt M. The Kobayashi pseudodistance on almost complex manifolds. Preprint Univ. Tromsoe № 97-19 (1997); *Differential Geom. Appl.* (to appear).
[*E-print*: `http://xxx.lanl.gov/abs/dg-ga/9703005`]

Б. С. Кругликов

1993-27, а также *1980-14*, *1981-12*, *1984-15* и *1988-16*

Соотношение $\Gamma_2 = \widehat{R}_2$ было установлено Э. Лойенгой [1]. Некоммутативные группы псевдогомологий, связанные с некоммутативными резольвентами, определены в [2].

См. также задачи *1972-27* и *1998-9*.

[1] Looijenga E. J. N. The complement of the bifurcation variety of a simple singularity. *Invent. Math.*, 1974, **23**(2), 105–116.

[2] Napolitano F. Pseudo-homology of complex hypersurfaces. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1999, **328**(11), 1025-1030.

F. Napolitano

1993-28

Трудность обширной деятельности Э. Картана в этой области во многом объясняется тем, что он не уточняет условий, при которых «метод работает», а вместо этого утверждает, что он работает «всегда» (подобно тому, как в *алгебраической* геометрии всегда работают ряд Пюизо или теорема о нулях и т. п.).

Попытка привести теорию Картана к сходному с алгебраической геометрией виду предпринята Ф. Гриффитсом и его учениками [1].

Но мне кажется, что нужно[1] разобраться в теории Картана с точки зрения теории особенностей, т. е. отбрасывая вначале случаи коразмерности 1, потом 2, … , потом все случаи бесконечной коразмерности. Далее, хотя и встречаются иногда уравнения и системы бесконечной коразмерности, для них тоже должна существовать своя иерархия внутри каждого класса вырождений (или класса систем, выделенных специальными условиями, подобными выделяющим гамильтоновы уравнения среди всех).

Насколько я понимаю, в этой области *ничего* не сделано, и поэтому смельчак, рискнувший ею заняться, вероятно, сразу же откроет много нового.

[1] Гриффитс Ф. Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление. М.: Мир, 1986. [*Английский оригинал* 1983 г.]

В. И. Арнольд (1993)

1993-29

Утверждение задачи верно на плоскости ($n = 2$) и неверно в высших размерностях ($n \geqslant 3$).

Задача была сформулирована в виде гипотезы Лоренсом Маркусом и Хидехико Ямабе [1] в 1960 г. Двумерный случай был исследован Ч. Олехом [2–3], Г. Мейстерсом [3], Ф. Хартманом [4], С. С. Анисовым и другими при некоторых дополнительных ограничениях на векторное поле. Олех [2] доказал глобальную устойчивость двумерного векторного поля v в условиях задачи в предположении, что норма $\|v\|$ поля v отделена от нуля вне некоторого компакта. Позднее в совместной работе Олеха с Мейстерсом [3] была доказана глобальная устойчивость двумерного полиномиального векторного поля, удовлетворяющего условиям

---

[1] в особенности для перехода от аналитических коэффициентов уравнений к гладким (общего положения)

задачи. Хартман [4] установил глобальную устойчивость двумерного поля $v(x, y)$ в условиях задачи в предположении, что интеграл

$$\int_0^\infty \Big(\min_{x^2+y^2=r^2} \|v(x,y)\| \Big)\, dr$$

расходится.

Результат Олеха [2] сводит двумерную задачу Маркуса–Ямабе к следующей: верно ли, что в условиях задачи отображение, заданное координатным представлением векторного поля, инъективно. Положительный ответ на этот вопрос был получен в 1993 г. в неопубликованной работе Анисова в предположении, что это отображение является накрытием, и в ослабленных условиях задачи: требуется только отсутствие у матрицы Якоби собственных значений из $[0; +\infty[\subset \mathbb{R}$. Результаты Анисова изложены в § 3 статьи [5].

Два частных результата при $n = 2$ были получены в работе [6]. Один из них — глобальная устойчивость в условиях двумерной задачи в предположении, что хотя бы одна из компонент векторного поля является рациональной функцией.

Положительные решения двумерной задачи в общем случае были найдены в 1993 г. одновременно и независимо К. Гутьерресом (доложено на конференции по динамическим системам в Рио-де-Жанейро в августе 1993 г. и на конференции в Тренто в сентябре 1993 г. [7], опубликовано в [8]), Р. Фесслером (доложено на конференции в Тренто в сентябре 1993 г. [9], опубликовано в [10]) и чуть позднее (в том же году) — автором настоящего комментария (анонсировано с кратким доказательством в [11], полный текст доказательства опубликован в [5]). Доказательство в [5] короче, чем два предыдущих. С другой стороны, Гутьеррес и Фесслер доказали более общие теоремы, из которых вытекает следующее утверждение. Пусть отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ всюду является локальным диффеоморфизмом, а его матрица Якоби не имеет положительных собственных значений вне некоторого компакта на плоскости. Тогда это отображение инъективно.

Чуть позднее положительное решение двумерной задачи получили китайские математики П. Чень, Цз. Хе и Х. Цинь (анонсировано с кратким доказательством в [12]).

Задача Маркуса–Ямабе в высших размерностях ($n \geqslant 3$) была исследована Н. Е. Барабановым [13], Х. Бернатом и Х. Йибре [14] и другими. В 1988 г. Барабанов [13] предпринял попытку построить четырехмерный контрпример к гипотезе Маркуса–Ямабе. Позднее Бернатом и Йибре в его статье были найдены ошибки. В 1994 г. Бернат и Йибре (см. [14]) построили безупречный четырехмерный контрпример, используя идеи Барабанова (четырехмерный контрпример порождает контрпримеры во всех бо́льших размерностях). Трехмерный контрпример к гипотезе Маркуса–Ямабе был построен автором настоящего комментария в 1995 г. Он был анонсирован на конференции по динамическим системам в Триесте в мае 1995 г. и на конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы» (XVIII сессия совместных заседаний семинара им. И. Г. Петровского и Московского математического общества) в Москве в апреле 1996 г. [15]. Полный текст доказательства приведен в препринте [16].

Чуть позднее, в том же (1995) году, А. Сима, А. ван ден Эссен, А. Гасулль, Э. Хабберс и Ф. Маньосас [17] построили и полиномиальный трехмерный контрпример к гипотезе Маркуса–Ямабе (опубликовано в [18]). Этот контрпример в [17–18] выписан в явном виде:

$$\dot{x} = -x + z(x + yz)^2, \quad \dot{y} = -y - (x + yz)^2, \quad \dot{z} = -z;$$

собственные значения матрицы Якоби постоянны и равны -1; начало координат — единственная особая точка; имеется неограниченная траектория

$$x(t) = 18e^t, \quad y(t) = -12e^{2t}, \quad z(t) = e^{-t}.$$

В работах [17–18] был получен и полиномиальный контрпример к дискретному варианту гипотезы Маркуса–Ямабе: построен полиномиальный автоморфизм $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, матрица Якоби которого всюду имеет собственные значения, меньшие единицы по модулю (а именно, постоянные и равные $\frac{1}{2}$), с неподвижной точкой, не являющейся глобально притягивающей (имеется орбита, уходящая на бесконечность).

О других результатах, связанных с задачей Маркуса–Ямабе, см. статьи [8, 18] и библиографию к ним, а также обзорные рефераты [19] (это реферат статей [10, 8, 5]), [20] (это реферат статьи [14]), [21] (это реферат статьи [6]) и [22] (это реферат статьи [18]) в *Mathematical Reviews*.

Следующая версия задачи Маркуса–Ямабе остается открытой: верно ли, что всякое векторное поле вида $\dot{x} = c - x + H(x)$ в $\mathbb{R}^n \ni x$, где $H(x)$ — однородный векторный многочлен степени 3 с нильпотентной матрицей Якоби, а $c = \text{const}$, имеет не более одной особой точки?

Эта задача эквивалентна известной проблеме якобиана (см. [20]).

[1] Markus L., Yamabe H. Global stability criteria for differential systems. *Osaka Math. J.*, 1960, **12**, 305–317.

[2] Olech C. On the global stability of an autonomous system on the plane. *Contributions Diff. Equat.*, 1963, **1**(3), 389–400.

[3] Meisters G. H., Olech C. Solution of the global asymptotic stability Jacobian conjecture for the polynomial case. In: Analyse Mathématique et Applications (Contributions en l'honneur de J.-L. Lions). Paris: Gauthier-Villars, 1988, 373–381.

[4] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Пер. с англ. И. Х. Сабитова и Ю. В. Егорова под ред. В. М. Алексеева. М.: Мир, 1970, гл. XIV, часть III.

[5] Глуцюк А. А. Асимптотическая устойчивость линеаризаций векторного поля на плоскости, имеющего особую точку, влечет глобальную устойчивость. *Функц. анализ и его прилож.*, 1995, **29**(4), 17–30.

[6] Parthasarathy T., Sabatini M. Some new results on the global asymptotic stability Jacobian conjecture. *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, 1993, **41**(3), 221–228 (1994).

[7] Gutiérrez C. A solution to the bidimensional global asymptotic stability conjecture. In: Recent Results on the Global Asymptotic Stability Jacobian Conjecture (Editor: M. Sabatini), Matematica 429, Università di Trento, 1994. Workshop, I-38050 POVO (TN) Italy, September 14–17, 1993.

[8] Gutiérrez C. A solution to the bidimensional global asymptotic stability conjecture. *Ann. Institut Henri Poincaré, Analyse non linéaire*, 1995, **12**(6), 627–671.

[9] Feßler R. A solution to the global asymptotic stability Jacobian conjecture and a generalization. In: Recent Results on the Global Asymptotic Stability Jacobian Conjecture (Editor: M. Sabatini), Matematica 429, Università di Trento, 1994. Workshop, I-38050 POVO (TN) Italy, September 14–17, 1993.

[10] Feßler R. A proof of the two-dimensional Markus–Yamabe stability conjecture and a generalization. *Ann. Polon. Math.*, 1995, **62**(1), 45–74.

[11] Глуцюк А. А. Полное решение проблемы якобиана для векторных полей на плоскости. *Успехи матем. наук*, 1994, **49**(3), 179–180.

[12] Chen P. N., He J. X., Qin H. S. A proof of the Jacobian conjecture on global asymptotic stability. *Kexue Tongbao*, 1996, **41**(14), 1265–1268 (на кит. яз.); *Chinese Sci. Bull.*, 1996, **41**(15), 1233–1237.

[13] Барабанов Н. Е. О проблеме Калмана. *Сиб. матем. ж.*, 1988, **29**(3), 3–11.

[14] Bernat J., Llibre J. Counterexample to Kalman and Markus–Yamabe conjecture in dimension larger than 3. *Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems*, 1996, **2**(3), 337–379.

[15] Глуцюк А. А. Трехмерный контрпример к проблеме Маркуса–Ямабе о глобальной устойчивости. *Успехи матем. наук*, 1996, **51**(5), 169.

[16] Glutsyuk A. A. Asymptotic stability of linearizations of a vector field in $\mathbb{R}^3$ with a singular point does not imply global stability. Preprint, Comunicaciónes del CIMAT, Guanajuato, Mexico, 1996.

[17] Cima A., van den Essen A., Gasull A., Hubbers E., Mañosas F. A polynomial counterexample to the Markus–Yamabe conjecture. Rep. 9551, Dept. Math. Univ. Nijmegen, Nijmegen, 1995.

[18] Cima A., van den Essen A., Gasull A., Hubbers E., Mañosas F. A polynomial counterexample to the Markus–Yamabe conjecture. *Adv. Math.*, 1997, **131**(2), 453–457.

[19] Olech C. Featured Review 96k:34099a,b,c. *Math. Reviews*, 1996.

[20] Meisters G. H. Featured Review 98c:34079. *Math. Reviews*, 1998.

[21] Meisters G. H. Featured Review 98c:34080. *Math. Reviews*, 1998.

[22] Meisters G. H. Featured Review 98k:34084. *Math. Reviews*, 1998.

А. А. Глуцюк

1993-31

Эта конструкция, принадлежащая, по-видимому, S. Lattès [1], хорошо известна в теории динамических систем (см., например, [2–3]). Для существования быстрого идеального L^2-динамо достаточно, чтобы векторное поле на плоскости имело одну седловую точку. В случае L^1-динамо и общего магнитного поля экспонента роста дается топологической энтропией поля скоростей [4–5]. Обзор топологических аспектов проблемы быстрого недиссипативного и диссипативного динамо, так же как и возможных модификаций рассматриваемых конструкций, содержится в книге [6].

См. также задачи *1981-18*, *1994-28* и *1994-29*.

[1] Lattès S. Sur l'itération des substitutions rationnelles et les fonctions de Poincaré. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1918, **166**(1), 26–28; erratum: 1918, **166**(2), 88.

[2] Любич М. Ю. Динамика рациональных преобразований: топологическая картина. *Успехи матем. наук*, 1986, **41**(4), 35–95.

[3] Katok A. B. Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 1980, **51**, 137–173.

[4] Klapper I., Young L.-S. Rigorous bounds on the fast dynamo growth rate involving topological entropy. *Commun. Math. Phys.*, 1995, **173**(3), 623–646.

[5] Kozlovskiĭ O. S. An integral formula for topological entropy of C^∞ maps. *Ergod. Theory Dynam. Syst.*, 1998, **18**(2), 405–424.

[6] Arnol′d V. I., Khesin B. A. Topological Methods in Hydrodynamics. New York: Springer, 1998. (Appl. Math. Sci., 125.) [*Перевод на русский язык*: Арнольд В. И., Хесин Б. А. Топологические методы в гидродинамике. М.: ФАЗИС, готовится к изданию.]

Б. А. Хесин

1993-33

Например, статистику Гаусса можно (я думаю) получить следующим образом: взять точку $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2_+$ и построить цепную дробь (огибающую выпуклой оболочки целых точек квадранта без 0 строго ниже прямой, соединяющей с нашей точкой).

Элементы цепной дроби — это числа целых точек на сторонах этой (и аналогичной верхней) оболочки. Для статистики можно взять любую из двух. Утверждается, что при $N \to \infty$ среднее по (несократимым?) точкам с $x_1^2 + x_2^2 \leqslant N^2$ (или с $x_1 \leqslant N$, $x_2 \leqslant N$, или с $x_1 + x_2 \leqslant N$ — всё равно) распределение 1 на любом месте цепной дроби, или 2, или любых отрезков $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$ стремится к вычисленному по мере Гаусса [инвариантной относительно эндоморфизма $z \mapsto \frac{1}{z-[z]}$ луча $z > 1$ в себя; инвариантность = (мера *про*образа совпадает с мерой образа), Гаусс нашел плотность такой меры, $\rho(z)\,dz$; здесь $z = x_2/x_1$].

Требуется обобщить этот результат на $\mathbb{R}^n$ вместо $\mathbb{R}^2$. Мера берется на куске проективного пространства (можно и на следующих грассманианах?). Отображения (обобщения эндоморфизма) строятся при помощи $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ вместо $1/z \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Можно, например, начать с парусов — оболочек целых точек в n симплициальных конусах с ребрами направлений

$$(e_1, \ldots, e_{\hat{\imath}}, \ldots, e_n; X),$$

где $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ — случайный вектор (несократимый?). Далее можно считать, скажем, числа целых точек на гранях, или числа вершин граней, или иные инварианты — какова их статистика для случайного X с нормой $\leqslant N \to \infty$?

Может быть, сто́ит провести (машинный?) эксперимент. Удобно строить парус с помощью базисов Гребнера или целочисленного линейного программирования — но главное выбрать правильный объект для статистики. Вероятно, лучше всего себя ведет «целочисленная площадь» граней?

В. И. Арнольд (1993)

* * *

1993-33

Статистика многомерных цепных дробей недавно исследовалась Ю. М. Суховым и М. Л. Концевичем, см. обзор [1].

[1] Arnol′d V. I. Higher dimensional continued fractions. *Reg. Chaot. Dynamics*, 1998, **3**(3), 10–17.

М. Б. Севрюк

1993-35

Это задача из статьи [1] (p. 265).

[1] Arnol′d V. I. Problems on singularities and dynamical systems. In: Developments in Mathematics: the Moscow School. Editors: V. I. Arnol′d and M. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993, 251–274.

1993-36

Это задача из статьи [1] (p. 265).

[1] Arnol′d V. I. Problems on singularities and dynamical systems. In: Developments in Mathematics: the Moscow School. Editors: V. I. Arnol′d and M. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993, 251–274.

1993-37

Это задача из статьи [1] (p. 267).

[1] Arnol′d V. I. Problems on singularities and dynamical systems. In: Developments in Mathematics: the Moscow School. Editors: V. I. Arnol′d and M. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993, 251–274.

1993-38

Это задача из статьи [1] (p. 267).

[1] Arnol′d V. I. Problems on singularities and dynamical systems. In: Developments in Mathematics: the Moscow School. Editors: V. I. Arnol′d and M. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993, 251–274.

1993-39

Это задача из статьи [1] (p. 269).

[1] Arnol′d V. I. Problems on singularities and dynamical systems. In: Developments in Mathematics: the Moscow School. Editors: V. I. Arnol′d and M. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993, 251–274.

См. комментарии к задаче *1995-13.*

1993-40

Это задача из статьи [1] (p. 269).

[1] Arnol′d V. I. Problems on singularities and dynamical systems. In: Developments in Mathematics: the Moscow School. Editors: V. I. Arnol′d and M. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993, 251–274.

См. комментарии к задаче *1995-13.*

1993-41

Это задача из статьи [1] (p. 270).

[1] Arnol′d V. I. Problems on singularities and dynamical systems. In: Developments in Mathematics: the Moscow School. Editors: V. I. Arnol′d and M. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993, 251–274.

1993-42

Это задача из статьи [1] (p. 271).

[1] Arnol′d V. I. Problems on singularities and dynamical systems. In: Developments in Mathematics: the Moscow School. Editors: V. I. Arnol′d and M. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993, 251–274.

1993-43

Это задача из статьи [1] (p. 271).

[1] Arnol′d V. I. Problems on singularities and dynamical systems. In: Developments in Mathematics: the Moscow School. Editors: V. I. Arnol′d and M. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993, 251–274.

1993-44

Это задача из статьи [1] (p. 271).

[1] Arnol′d V. I. Problems on singularities and dynamical systems. In: Developments in Mathematics: the Moscow School. Editors: V. I. Arnol′d and M. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993, 251–274.

1993-45

Это задача из статьи [1] (p. 272).

[1] Arnol′d V. I. Problems on singularities and dynamical systems. In: Developments in Mathematics: the Moscow School. Editors: V. I. Arnol′d and M. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993, 251–274.

1993-46

Это задача из статьи [1] (p. 272).

[1] Arnol′d V. I. Problems on singularities and dynamical systems. In: Developments in Mathematics: the Moscow School. Editors: V. I. Arnol'd and M. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993, 251–274.

Ср. задачу *1993-34*.

1993-47

Это задача из статьи [1] (p. 273).

[1] Arnol′d V. I. Problems on singularities and dynamical systems. In: Developments in Mathematics: the Moscow School. Editors: V. I. Arnol'd and M. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993, 251–274.

Ср. задачу *1992-1*.

1993-48

Отметим, что если все неподвижные точки непрерывной инволюции n-мерного тора изолированы, то их либо нет, либо ровно 2^n [1] (см. комментарий к задаче *1983-3*).

Одно ограничение на числа p_i получено в работе [2]. А именно, множество неподвижных точек инволюции $G|_L$ можно рассматривать как кольцо $(\mathbb{Z}_2)^n$ относительно операций покомпонентного сложения и умножения (если угловая координата φ на торе L определена $\operatorname{modd} 2$). Оказывается, что для любой пары неподвижных точек a_i и a_j инволюции $G|_L$ сумма чисел p, отвечающих неподвижным точкам 0, a_i, a_j и $a_i + a_j$, четна. Существуют ли другие ограничения, неизвестно.

Отметим, что если среди p_i есть числа разной четности, то объемлющее многообразие M неориентируемо [2].

При $n = 1$, $N = 2$ реализуются все возможности. Наборы типов $(1,1)$, $(1,1)$ и $(2,0)$, $(2,0)$ легко построить, рассматривая инволюции цилиндра $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, оставляющие инвариантной окружность $L = \mathbb{S}^1 \times \{0\}$. Набор $(1,1)$, $(2,0)$ реализуется для инволюции листа Мёбиуса, оставляющей инвариантной центральную окружность.

[1] Montaldi J. Caustics in time reversible Hamiltonian systems. In: Singularity Theory and its Applications, Part II. Editors: M. Roberts and I. Stewart. Berlin: Springer, 1991, 266–277. (Lecture Notes in Math., 1463.)

[2] Quispel G. R. W., Sevryuk M. B. KAM theorems for the product of two involutions of different types. *Chaos*, 1993, **3**(4), 757–769.

М. Б. Севрюк

1994

1994-5

Эта задача решена в статье [1] (ответы — «да»).

[1] Анисов С. С. Выпуклые кривые в $\mathbb{R}P^n$. *Труды МИРАН им. В. А. Стеклова*, 1998, **221**, 9–47.

В. Д. Седых

1994-6

Искомый класс деформаций описан в статье [1].

[1] Арнольд В. И. К лежандровой теории Штурма пространственных кривых. *Функц. анализ и его прилож.*, 1998, **32**(2), 1–7.

В. Д. Седых

1994-9

Вот план попытки перенести эту конструкцию на $\mathbb{C}^3$. Зафиксируем значение $\lambda_1 \neq 0$. Отождествим близкие прямые, параллельные оси λ_2, деформируя фиксированным образом на такой прямой точку λ_2. Отождествим на исходной и новой прямой точки ∞ и пары точек пересечения прямой с дискриминантом. Это делается при помощи той же конструкции отождествления близких эллиптических кривых. Двулистно накроем нашу прямую $\lambda_1 = \mathrm{const}$ с ветвлением в 4 точках — выбранной точке λ_2, двух точках вырождения на дискриминанте и точкой на бесконечности. Отождествим две полученные эллиптические кривые, как это делалось в $\mathbb{C}^2$. Поскольку точка на бесконечности при деформации λ_2 сохраняется, полученное вещественное отождествление исходной и продеформированной накрывающей эллиптической кривой коммутирует с инволюцией, т. е. опускается на базу, определяя гомеоморфизм нашей прямой $\lambda_1 = \mathrm{const}$ на продеформированную прямую (уважающий ∞ и точки дискриминанта и двигающий желаемым образом точку λ_2). Теперь нужно продолжить локальную тривиализацию расслоения кривых ветвления $x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2 + y^2 = 0$ на плоскости $\mathbb{C}^2$ до такой же тривиализации расслоения двулистных накрытий $\mathbb{C}^2$ с ветвлениями вдоль этих кривых. Для этого мы снова используем отождествление эллиптических линий уровня функции $\lambda_2 = -x^3 - \lambda_1 x - y^2$ (мы уже знаем, какую из этих кривых предстоит отождествить с какой продеформированной из построения отождествления прямых $\lambda_1 = \mathrm{const}$). Здесь нужно проверить, что вся эта конструкция отождествления соседних эллиптических кривых непрерывно продолжается до дискриминанта, в частности, до $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (используя асимптотики эллиптических интегралов).

В. И. Арнольд

1994-10

Число классов плоских кривых с $n \leqslant 10$ двойными точками нашли при помощи компьютерных вычислений С. М. Гусейн-Заде и Ф. С. Дужин [1]. Они рассмотрели четыре варианта задачи: длинные и замкнутые кривые на ориентированной и неориентированной плоскости (сами кривые неориентированы).

[1] Гусейн-Заде С. М., Дужин Ф. С. О количестве топологических типов плоских кривых. *Успехи матем. наук*, 1998, **53**(3), 197–198.

С. В. Дужин

* * *

1994-10

Экспоненциальная верхняя оценка получена в работе [1]. Перечисляющий алгоритм содержится в статье [2]. Сама задача сформулирована в [3].

[1] Lando S. K. On enumeration of unicursal curves. In: Differential and Symplectic Topology of Knots and Curves. Editor: S. Tabachnikov. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999, 77–81. (AMS Translations, Ser. 2, 190; Advances in Math. Sci., 42.)

[2] Gusein-Zade S. M. On the enumeration of curves from infinity to infinity. In: Singularities and Bifurcations. Editor: V. I. Arnol′d. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994, 189–198. (Advances in Soviet Math., 21.)

[3] Arnol′d V. I. Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications. In: Singularities and Bifurcations. Editor: V. I. Arnol′d. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994, 33–91. (Advances in Soviet Math., 21.)

С. К. Ландо

1994-11

Простейшая особенность — на страте $\lambda_1 = \lambda_2$ коразмерности 3 — описывается замкнутой 2-формой на трехмерной трансверсали. Интерпретируя 2-форму в $\mathbb{R}^3$ как бездивергентное векторное поле, получаем поле с ньютоновской особенностью.

Следующая особенность — на страте $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ коразмерности 8 — описывается замкнутой 2-формой на $\mathbb{R}^8$. Ее ограничение на $\mathbb{S}^7$ имеет особенности ньютоновского типа на двух четырехмерных «полюсах». Мы получаем, таким образом, неизученное обобщение ньютоновского поля (замечание М. Берри по поводу статьи [1]).

[1] Arnol′d V. I. Remarks on eigenvalues and eigenvectors of Hermitian matrices, Berry phase, adiabatic connections and quantum Hall effect. *Selecta Math.* (*N. S.*), 1995, **1**(1), 1–19. [*Перевод на русский язык в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 583–604.]

В. И. Арнольд

1994-15

Число компонент связности множества выпуклых кривых в $\mathbb{RP}^n$ вычислил М. З. Шапиро (доказательство см. в его статье [1]).

Отрицательный ответ на первый вопрос задачи дал С. С. Анисов (при $n = 3$) в своей статье [2].

[1] Шапиро М. З. Топология пространства невырожденных кривых. *Изв. РАН, сер. матем.*, 1993, **57**(5), 106–126.

[2] Анисов С. С. Выпуклые кривые в $\mathbb{RP}^n$. *Труды МИРАН им. В. А. Стеклова*, 1998, **221**, 9–47.

В. Д. Седых

* * *

1994-15

Отрицательный ответ на первый вопрос задачи для незамкнутых проективных кривых вытекает из основного результата работы [1], утверждающего, что кривые, находящиеся на границе пространства выпуклых (незамкнутых) кривых, обладают тем свойством, что флаги в начальной и конечной точках нетрансверсальны. Здесь существенно то, что любой характер нетрансверсальности может быть реализован граничными кривыми, в то время как в задаче речь идет только о нетрансверсальности точек и гиперплоскостей.

[1] Шапиро Б. З. Пространства линейных дифференциальных уравнений и многообразия флагов. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 1990, **54**(1), 173–187.

Б. З. Шапиро

1994-16

См. работу [1].

[1] Овсиенко В. Ю., Хесин Б. А. Симплектические листы скобок Гельфанда–Дикого и гомотопические классы неуплощающихся кривых. *Функц. анализ и его прилож.*, 1990, **24**(1), 38–47.

Б. А. Хесин

1994-17

Аналогичная задача для евклидовой двойственности имеет прямое отношение к изопериметрическим неравенствам для евклидовых кривых, ср. [1].

[1] Sedykh V. D., Shapiro B. Z. On Young hulls of convex curves in $\mathbb{R}^{2n}$. *J. Geometry*, 1998, **63**(1–2), 168–182.

Б. З. Шапиро

1994-21

Задача решена А. Шумаковичем (1995) и независимо В. В. Горюновым (см. [1]). Утверждение останется верным, если заменить $\mathbb{R}^2$ на произвольную двумерную поверхность [2].

[1] Chmutov S. V., Goryunov V. V., Murakami H. Regular Legendrian knots and the HOMFLY polynomial of immersed plane curves. Preprint, University of Liverpool, March 1996.

[2] Ferrand E. Singularities cancellation on wave fronts. *Topology Appl.* (to appear).

С. В. Чмутов, E. Ferrand

1994-22

Доказательство имеется в статье С. С. Анисова [1].

[1] Anisov S. S. Projective convex curves. In: The Arnol′d–Gel′fand Mathematical Seminars: Geometry and Singularity Theory. Editors: V. I. Arnol′d, I. M. Gel′fand, V. S. Retakh and M. Smirnov. Boston, MA: Birkhäuser, 1997, 93–99.

В. Д. Седых

1994-23

Эта задача решена: в [1] доказано, что фронты выпуклых замкнутых кривых в $\mathbb{R}P^n$ диффеоморфны.

[1] Shapiro B. Z. Discriminants of convex curves are homeomorphic. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1998, **126**(7), 1923–1930.

Б. З. Шапиро

1994-24

Это задача из статьи [1а] (§ 1.1; см. также [1б], с. 555).

[1a] Arnol′d V. I. Mathematical problems in classical physics. In: Trends and Perspectives in Applied Mathematics. Editors: F. John, J. E. Marsden and L. Sirovich. New York: Springer, 1994, 1–20. (Appl. Math. Sci., 100.)

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 553–575.

1994-25

Это задача из статьи [1а] (§ 1.2; см. также [1б], с. 556).

[1a] Arnol′d V. I. Mathematical problems in classical physics. In: Trends and Perspectives in Applied Mathematics. Editors: F. John, J. E. Marsden and L. Sirovich. New York: Springer, 1994, 1–20. (Appl. Math. Sci., 100.)

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 553–575.

1994-26

Это задача из статьи [1а] (§ 1.3; см. также [1б], с. 558).

[1a] Arnol′d V. I. Mathematical problems in classical physics. In: Trends and Perspectives in Applied Mathematics. Editors: F. John, J. E. Marsden and L. Sirovich. New York: Springer, 1994, 1–20. (Appl. Math. Sci., 100.)

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 553–575.

См. комментарий к задаче *1971-11*.

1994-27

Это задача из статьи [1а] (§ 1.3; см. также [1б], с. 558).

[1а] Arnol′d V. I. Mathematical problems in classical physics. In: Trends and Perspectives in Applied Mathematics. Editors: F. John, J. E. Marsden and L. Sirovich. New York: Springer, 1994, 1–20. (Appl. Math. Sci., 100.)

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 553–575.

См. комментарий к задаче *1971-11.*

1994-28

Это задача из статьи [1а] (§ 1.4; см. также [1б], с. 559–560).

[1а] Arnol′d V. I. Mathematical problems in classical physics. In: Trends and Perspectives in Applied Mathematics. Editors: F. John, J. E. Marsden and L. Sirovich. New York: Springer, 1994, 1–20. (Appl. Math. Sci., 100.)

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 553–575.

См. комментарии к задачам *1981-18* и *1993-31.*

1994-29

Это задача из статьи [1а] (§ 1.4; см. также [1б], с. 561).

[1а] Arnol′d V. I. Mathematical problems in classical physics. In: Trends and Perspectives in Applied Mathematics. Editors: F. John, J. E. Marsden and L. Sirovich. New York: Springer, 1994, 1–20. (Appl. Math. Sci., 100.)

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 553–575.

См. комментарии к задачам *1981-18* и *1993-31.*

1994-30

Это задача из статьи [1a] (§ 1.5; см. также [1б], с. 563).

[1a] Arnol'd V. I. Mathematical problems in classical physics. In: Trends and Perspectives in Applied Mathematics. Editors: F. John, J. E. Marsden and L. Sirovich. New York: Springer, 1994, 1–20. (Appl. Math. Sci., 100.)

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 553–575.

См. комментарий к задаче *1986-12*.

1994-31

Это задача из статьи [1a] (§ 1.6; см. также [1б], с. 567–569).

[1a] Arnol'd V. I. Mathematical problems in classical physics. In: Trends and Perspectives in Applied Mathematics. Editors: F. John, J. E. Marsden and L. Sirovich. New York: Springer, 1994, 1–20. (Appl. Math. Sci., 100.)

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 553–575.

См. комментарий к задаче *1981-14*.

1994-32

Это задача из статьи [1a] (§ 1.7; см. также [1б], с. 570).

[1a] Arnol'd V. I. Mathematical problems in classical physics. In: Trends and Perspectives in Applied Mathematics. Editors: F. John, J. E. Marsden and L. Sirovich. New York: Springer, 1994, 1–20. (Appl. Math. Sci., 100.)

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 553–575.

1994-33

Это задача из статьи [1a] (§ 1.8; см. также [1б], с. 571).

[1а] Arnol′d V. I. Mathematical problems in classical physics. In: Trends and Perspectives in Applied Mathematics. Editors: F. John, J. E. Marsden and L. Sirovich. New York: Springer, 1994, 1–20. (Appl. Math. Sci., 100.)

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 553–575.

См. комментарий к задаче *1963-1*.

1994-34

Это задача из статьи [1а] (§ 1.8; см. также [1б], с. 571).

[1а] Arnol′d V. I. Mathematical problems in classical physics. In: Trends and Perspectives in Applied Mathematics. Editors: F. John, J. E. Marsden and L. Sirovich. New York: Springer, 1994, 1–20. (Appl. Math. Sci., 100.)

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 553–575.

1994-35

Это задача из статьи [1а] (§ 1.8; см. также [1б], с. 572).

[1а] Arnol′d V. I. Mathematical problems in classical physics. In: Trends and Perspectives in Applied Mathematics. Editors: F. John, J. E. Marsden and L. Sirovich. New York: Springer, 1994, 1–20. (Appl. Math. Sci., 100.)

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 553–575.

1994-36

Это задача из статьи [1а] (§ 1.8; см. также [1б], с. 573).

[1а] Arnol′d V. I. Mathematical problems in classical physics. In: Trends and Perspectives in Applied Mathematics. Editors: F. John, J. E. Marsden and L. Sirovich. New York: Springer, 1994, 1–20. (Appl. Math. Sci., 100.)

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 553–575.

1994-37

Это задача из статьи [1а] (§ 1.8; см. также [1б], с. 573).

[1а] Arnol′d V. I. Mathematical problems in classical physics. In: Trends and Perspectives in Applied Mathematics. Editors: F. John, J. E. Marsden and L. Sirovich. New York: Springer, 1994, 1–20. (Appl. Math. Sci., 100.)

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 553–575.

См. комментарий к задаче *1973-4*.

1994-38

Это задача из статьи [1а] (§ 3; см. также [1б], с. 580).

Близкое определение аналитически разрешимой задачи приведено в статье [2а] (§ 8; см. также [2б], с. 547–549).

[1а] Arnol′d V. I. Problèmes résolubles et problèmes irrésolubles analytiques et géométriques. In: Passion des Formes. Dynamique Qualitative Sémiophysique et Intelligibilité. Dédié à R. Thom. Fontenay-St Cloud: ENS Éditions, 1994, 411–417; In: Formes et Dynamique, Renaissance d'un Paradigme. Hommage à René Thom. Paris: Eshel, 1995.

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 577–582.

[2а] Arnol′d V. I. Sur quelques problèmes de la théorie des systèmes dynamiques. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 1994, **4**(2), 209–225.

Перевод на русский язык в сборнике:

[2б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 533–551.

1994-39

Это задача из статьи [1а] (§ 3; см. также [1б], с. 581).

[1а] Arnol′d V. I. Problèmes résolubles et problèmes irrésolubles analytiques et géométriques. In: Passion des Formes. Dynamique Qualitative Sémiophysique et Intelligibilité. Dédié à R. Thom. Fontenay-St Cloud: ENS Éditions, 1994, 411–417; In: Formes et Dynamique, Renaissance d'un Paradigme. Hommage à René Thom. Paris: Eshel, 1995.

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 577–582.

1994-40

Это задача из статьи [1a] (§ 3; см. также [1б], с. 581).

[1a] Arnol′d V. I. Problèmes résolubles et problèmes irrésolubles analytiques et géométriques. In: Passion des Formes. Dynamique Qualitative Sémiophysique et Intelligibilité. Dédié à R. Thom. Fontenay-St Cloud: ENS Éditions, 1994, 411–417; In: Formes et Dynamique, Renaissance d'un Paradigme. Hommage à René Thom. Paris: Eshel, 1995.

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 577–582.

1994-41

Это задача из статьи [1a] (§ 3; см. также [1б], с. 581).

Задача о геометрической разрешимости проблемы устойчивости положения равновесия векторного поля в $\mathbb{R}^n$ (ср. *1994-38*) содержится также в статье [2a] (§ 8; см. также [2б], с. 549).

[1a] Arnol′d V. I. Problèmes résolubles et problèmes irrésolubles analytiques et géométriques. In: Passion des Formes. Dynamique Qualitative Sémiophysique et Intelligibilité. Dédié à R. Thom. Fontenay-St Cloud: ENS Éditions, 1994, 411–417; In: Formes et Dynamique, Renaissance d'un Paradigme. Hommage à René Thom. Paris: Eshel, 1995.

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 577–582.

[2a] Arnol′d V. I. Sur quelques problèmes de la théorie des systèmes dynamiques. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 1994, **4**(2), 209–225.

Перевод на русский язык в сборнике:

[2б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 533–551.

1994-42

Это задача из статьи [1a] (§ 3; см. также [1б], с. 582).

[1a] Arnol′d V. I. Problèmes résolubles et problèmes irrésolubles analytiques et géométriques. In: Passion des Formes. Dynamique Qualitative Sémiophysique et Intelligibilité. Dédié à R. Thom. Fontenay-St Cloud: ENS Éditions, 1994, 411–417; In: Formes et Dynamique, Renaissance d'un Paradigme. Hommage à René Thom. Paris: Eshel, 1995.

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 577–582.

1994-43

Это задача из статьи [1a] (§ 1; см. также [1б], с. 533).

[1a] Arnol′d V. I. Sur quelques problèmes de la théorie des systèmes dynamiques. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 1994, **4**(2), 209–225.

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 533–551.

1994-44

Это задача из статьи [1a] (§ 2; см. также [1б], с. 534).

[1a] Arnol′d V. I. Sur quelques problèmes de la théorie des systèmes dynamiques. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 1994, **4**(2), 209–225.

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 533–551.

1994-45

Это задача из статьи [1a] (§ 3; см. также [1б], с. 536).

[1a] Arnol′d V. I. Sur quelques problèmes de la théorie des systèmes dynamiques. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 1994, **4**(2), 209–225.

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 533–551.

См. комментарии к задаче *1988-6*.

1994-46

Это задача из статьи [1a] (§ 3; см. также [1б], с. 536).

[1a] Arnol′d V. I. Sur quelques problèmes de la théorie des systèmes dynamiques. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 1994, **4**(2), 209–225.

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 533–551.

См. комментарии к задаче *1988-6*.

1994-47

Это задача из статьи [1a] (§ 3; см. также [1б], с. 536).

[1a] Arnol′d V. I. Sur quelques problèmes de la théorie des systèmes dynamiques. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 1994, **4**(2), 209–225.

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 533–551.

См. комментарии к задачам *1988-6* и *1992-13*.

1994-48

Это задача из статьи [1a] (§ 4; см. также [1б], с. 537–538).

[1a] Arnol′d V. I. Sur quelques problèmes de la théorie des systèmes dynamiques. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 1994, **4**(2), 209–225.

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 533–551.

См. комментарии к задачам *1988-6* и *1992-13*.

1994-49

Это задача из статьи [1a] (§ 5; см. также [1б], с. 539).

[1a] Arnol′d V. I. Sur quelques problèmes de la théorie des systèmes dynamiques. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 1994, **4**(2), 209–225.

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 533–551.

См. комментарии к задаче *1988-6*.

1994-50

Это задача из статьи [1a] (§ 5; см. также [1б], с. 540).

[1a] Arnol′d V. I. Sur quelques problèmes de la théorie des systèmes dynamiques. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 1994, **4**(2), 209–225.

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 533–551.

См. комментарии к задаче *1988-6*.

1994-51

Это задача из статьи [1a] (§ 6; см. также [1б], с. 541).

[1a] Arnol′d V. I. Sur quelques problèmes de la théorie des systèmes dynamiques. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 1994, **4**(2), 209–225.

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 533–551.

1994-52

Это задача из статьи [1a] (§ 6; см. также [1б], с. 542).

[1a] Arnol′d V. I. Sur quelques problèmes de la théorie des systèmes dynamiques. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 1994, **4**(2), 209–225.

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 533–551.

1994-53

Это задача из статьи [1а] (§ 7; см. также [1б], с. 545).

[1а] Arnol′d V. I. Sur quelques problèmes de la théorie des systèmes dynamiques. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 1994, **4**(2), 209–225.

Перевод на русский язык в сборнике:

[1б] Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 533–551.

См. комментарий к задаче *1972-20*.

1995

1995-1

Доказано [1], что число компонент связности в упомянутом пространстве совпадает с числом Эйлера–Бернулли, т. е. числом up-down последовательностей определенной длины на окружности.

См. также комментарии к задачам *1970-15*, *1973-27* и *1991-2*.

[1] Шапиро Б. З. О числе компонент пространства тригонометрических многочленов степени n с $2n$ различными критическими значениями. *Матем. заметки*, 1997, **62**(4), 635–640.

Б. З. Шапиро

1995-2

См. комментарии к задаче *1970-15*.

1995-8

Задача до сих пор открыта. Имеются примеры Ф. Аикарди, предположительно являющиеся ответом.

E. Ferrand

1995-9

Задача решена Ю. В. Чекановым в 1995 г. (до сих пор не опубликовано). Решение также было анонсировано Я. М. Элиашбергом и Г. Хофером на конференции в Торонто, посвященной 60-летию В. И. Арнольда (Arnol′dfest, 1997).

E. Ferrand

1995-10

Задача решена независимо в работах [1–2].

[1] Entov M. On the necessity of Legendrian fold singularities. *Internat. Math. Res. Notices*, 1998, **20**, 1055–1077.

[2] Ferrand E., Pushkar′ P. E. Non-cancellation of cusps on wave fronts. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.* I *Math.*, 1998, **327**(9), 827–831.

E. Ferrand

1995-11

В работе [1] получен критерий того, что древесная кривая может быть реализована без перегибов. (*Древесность* — это свойство распадения кривой на несвязные компоненты при удалении любой двойной точки.) Задача вычисления минимального числа точек уплощения на классе древесных кривых сведена в [1] к дискретной оптимизационной задаче. Последняя, по-видимому, не может иметь решения в замкнутой форме.

[1] Shapiro B. Z. Tree-like curves and their number of inflection points. Preprint MPI (Max-Planck-Institut) für Mathematik 96-87, submitted to the Arnol′d–Gel′fand Seminars on Geometry and Singularity Theory.

Б. З. Шапиро

* * *

1995-11

В этой форме задача до сих пор открыта.

E. Ferrand

1995-12

См. комментарий к задаче *1998-17*.

1995-13, а также *1993-39* и *1993-40*

Что число точек возврата не меньше четырех, верно для любой выпуклой поверхности. Предположительно не только первая, но также и вторая, третья и т. д. каустика «полюса» общего положения на выпуклой поверхности общего положения имеет не менее четырех точек возврата, но это не доказано даже для поверхностей, C^∞-близких к сфере. Впрочем, для любого N на N-й каустике имеется не менее четырех точек возврата, если отличие от сферы меньше некоторого достаточно малого $\varepsilon(N)$.

Якоби проинтегрировал уравнение геодезических на эллипсоиде в θ-функциях, поэтому вопрос об особых точках каустик на эллипсоидах относится к алгебраической геометрии.

Этот вопрос, однако, по-видимому, не поддается методам современных алгебраических геометров, больше интересующихся теорией чисел, чем настоящими (real) проблемами действительной геометрии.

В. И. Арнольд

* * *

1995-13, а также *1993-39* и *1993-40*

Указанный В. И. Арнольдом результат об оценке числа точек возврата на поверхностях, близких к сфере, опубликован в [1].

Эта задача породила много других. Например, в статье [2] построен интересный топологический инвариант, оценивающий число особенностей типа D_4 на каустиках трехмерных многообразий.

В работе [3] показано, что страт Максвелла многомерного эллипсоида устроен максимально просто по сравнению с другими гиперповерхностями.

[1] Arnol′d V. I. Topological Invariants of Plane Curves and Caustics. Dean Jacqueline B. Lewis Memorial Lectures, Rutgers University. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994. (University Lecture Series, 5.)

[2] Kazarian M. È. Umbilical characteristic number of Lagrangian mappings of 3-dimensional pseudo-optical manifolds. In: Singularities and Differential Equations. Editors: S. Janeczko, W. M. Zajączkowski and B. Ziemian. Warsaw: Polish Acad. Sci., Inst. Math., 1996, 161–170. (Banach Center Publ., 33.)

[3] Закалюкин В. М. Страт Максвелла лагранжева коллапса. *Труды МИРАН им. В. А. Стеклова*, 1998, **221**, 197–212.

В. М. Закалюкин

1996

1996-2

Теория таких групп когомологий аналогична теории инвариантов конечного порядка для типичных иммерсий (в частности, для них всех имеется естественная фильтрация), хотя алгебраически ответы выглядят более причудливо. Например, группа 1-мерных когомологий множества иммерсий $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ без 4-кратных самопересечений имеет следующие компоненты $\mathcal{F}_i$ младших порядков: $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 0$, $\mathcal{F}_3 = \mathbb{Z}_2$, $\mathcal{F}_4/\mathcal{F}_3 = \mathbb{Z}_5$, $\mathcal{F}_5/\mathcal{F}_4 = \mathbb{Z}^2$. Отсутствие целочисленного класса младшего (3-го) порядка связано с неориентируемостью конфигурационного пространства четверок точек в $\mathbb{S}^1$ (тогда как существование инварианта «странности», см. [1], обеспечивается ориентируемостью аналогичного пространства троек). Первая свободная группа $\mathbb{Z}^2$ — это группа гомологий комплекса связных 3-гиперграфов на 6 вершинах, инвариантных относительно циклической перестановки этих вершин, см. [2].

[1] Arnol′d V. I. Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications. In: Singularities and Bifurcations. Editor: V. I. Arnol′d. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994, 33–91. (Advances in Soviet Math., 21.)

[2] Vassiliev V. A. On finite order invariants of triple point free plane curves. In: Differential Topology, Infinite-Dimensional Lie Algebras, and Applications. D. B. Fuchs' 60th Anniversary Collection. Editors: A. Astashkevich and S. Tabachnikov. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999, 275–300. (AMS Translations, Ser. 2, 194; Advances in Math. Sci., 44.)

В. А. Васильев

1996-4

См. комментарий к задаче *1993-24.* Ср. также задачу *1985-24.*

1996-5

Осцилляционная теорема Штурма (Штурм, 1836) утверждает, что k-я ($k \geqslant 1$) собственная функция уравнения Штурма–Лиувилля

$$-(f(x)\,y'(x))' + g(x)\,y(x) = \lambda_k\, y(x), \qquad x \in [0;\pi], \tag{1}$$

при достаточно общих краевых условиях имеет столько же нулей, сколько их имеет k-я собственная функция тривиального уравнения $-\tilde{y}'' = \tilde{\lambda}_k\,\tilde{y}$ при тех же краевых условиях; см., например, [1–2]. Этот классический результат обобщался и развивался в течение последующего столетия (некоторые обобщения приведены в [2], гл. X). Так, в 1916 г. Келлог получил следующий результат, который мы приводим, следуя [3], с. 199: *пусть $\varphi_k(x)$ — k-я собственная функция уравнения* (1), *дополненного «достаточно общими» краевыми условиями. Тогда при любых целых k и m ($k < m$) линейная комбинация $\sum_{j=k}^{m} c_j\,\varphi_j(x)$* ($\sum_{j=k}^{m} c_j^2 > 0$) *имеет в интервале* $(0;\pi)$ *не менее $k-1$ перемены знака и не более, чем $m-1$ нуль.* Например, функция $\sum_{j=k}^{m} c_j \sin jx$, $x \in (0;\pi)$, имеет не менее $k-1$ перемены знака, так как $\sin jx$ является j-й собственной функцией оператора $-\partial^2/\partial x^2$ при нулевых краевых условиях.

Теорема Келлога не раз переоткрывалась. Так, в 1990 г. С. Л. Табачников [4] передоказал ее в случае простейшего уравнения $-y'' = \lambda_k\, y$, дополненного 2π-периодическим краевым условием: *ненулевая периодическая вещественная функция $\sum_{j=k}^{\infty}(c_j \sin jx + d_j \cos jx)$ имеет на окружности периодов не менее $2k$ перемен знака.*

Задача *1996-5* является континуальным (по k) аналогом приведенной теоремы, так как функция $f(x)$ при указанном условии равна $2\int_{\omega}^{\infty}\bigl(\operatorname{Re} F(\ell)\cos \ell x - \operatorname{Im} F(\ell)\sin \ell x\bigr)\,d\ell$, т. е. она не содержит в разложении в интеграл Фурье гармоник $\sin \ell x$ и $\cos \ell x$ с $\ell < \omega$.

Эта задача (и теорема Келлога) имеют важный аналог в теории случайных процессов. А именно, пусть $\xi(t)$ — стационарный вещественный *гауссов* случайный процесс. Отнормируем его таким образом, чтобы выполнялись равенства $\mathsf{M}\xi(0) = 0$, $\mathsf{M}\xi(0)^2 = 1$ (M обозначает математическое ожидание). Обозначим через $r(t)$ корреляционную функцию процесса: $r(t) = \mathsf{M}\xi(0)\,\xi(t)$. Предположим, что функция $r(t)$ интегрируема, и обозначим через $f(\lambda)$ спектральную плотность процесса. Тогда $r(t) = \int e^{it\lambda} f(\lambda)\,d\lambda$. Физический смысл $f(\lambda)$ — спектральная плотность энергии процесса $\xi(t)$ (см. [5]). Предположим, что $f(\lambda) = 0$ при $|\lambda| \leqslant \omega$, т. е. энергия процесса $\xi(t)$ сосредоточена вне интервала «низких частот» $(-\omega;\omega)$ (при этом преобразование Фурье $\hat{\xi}(\lambda)$ случайной функции $\xi(x)$, понимаемое в смысле теории обобщенных функций умеренного роста, почти наверное равно нулю при $|\lambda| < \omega$). Что можно сказать о плотности нулей случайной функции $\xi(t)$?

Обозначим через $\mathcal{E}_{[T_0;\,T_0+T]}$ случайную величину, равную числу нулей случайной функции $\xi(t)$ на отрезке $[T_0; T_0 + T]$. В силу стационарности, ее среднее значение E_T не зависит от T_0 и пропорционально T: $E_T = TE_1$. Для E_1 (только в гауссовом случае!) справедлива формула Райса (см. [5], с. 203):

$$E_1 = \frac{1}{\pi}\lambda_2^{1/2},$$

где λ_2 — второй спектральный момент: $\lambda_2 = \int \lambda^2 f(\lambda)\,d\lambda$. Так как $f(\lambda) = 0$ при $|\lambda| \leqslant \omega$, то $\lambda_2 \geqslant \omega^2 \int f(\lambda)\,d\lambda = \omega^2$. Значит,

$$E_1 \geqslant \frac{\omega}{\pi}.$$

Для фиксированной траектории $\xi(t)$ имеем:

$$\frac{1}{T}\mathcal{E}_{[0;\,T]} = \frac{1}{T}\bigl(\mathcal{E}_{[0;\,1]} + \mathcal{E}_{[1;\,2]} + \dots + \mathcal{E}_{[T-1;\,T]}\bigr). \tag{2}$$

Так как корреляция $r(t)$ интегрируема, то одинаково распределенные случайные величины $\mathcal{E}_{[j;\,j+1]}$ и $\mathcal{E}_{[l;\,l+1]}$ слабо коррелированны при больших $|l - j|$. Значит, к правой части (2) применим усиленный закон больших чисел, и

$$\frac{1}{T}\mathcal{E}_{[0;\,T]} \to E_1 \geqslant \frac{\omega}{\pi} \quad \text{при } T \to \infty$$

для почти каждой траектории $\xi(t)$. Это соотношение доказывает утверждение задачи *1996-5* для стационарных гауссовых процессов.

В негауссовом случае про случайные величины $\mathcal{E}_{[0;\,T]}$ известно очень мало.

В заключение заметим, что для вещественного интеграла Фурье $f(x) = \int F(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda$ верен следующий аналог второго утверждения теоремы Келлога: если $F(\lambda) = 0$ при $|\lambda| \geqslant m$ и $n(\ell)$ — количество нулей

$f(x)$ на отрезке $[-\ell;\ell]$, то $\varliminf n(\ell)/2\ell \leqslant m/\pi$ при $\ell \to \infty$. Этот результат сразу следует из формулы Йенсена (см. [6], с. 24), примененной к функции f, продолженной до целой функции $f(z)$ комплексного аргумента z.

В многомерном случае верен ослабленный аналог теоремы Штурма: число областей перемен знака k-й собственной функции самосопряженного эллиптического дифференциального оператора второго порядка не превосходит k, каково бы ни было число независимых переменных (см. [7], с. 383). Аналог второго утверждения теоремы Келлога в многомерном случае отсутствует — приведенное выше утверждение *не верно* для линейной комбинации первых k собственных функций.

[1] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Пер. с англ. И. Х. Сабитова и Ю. В. Егорова под ред. В. М. Алексеева. М.: Мир, 1970.

[2] Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Пер. с англ. под ред. А. М. Эфроса. Харьков: ОНТИ Украины, 1939.

[3] Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и малые колебания механических систем. М.–Л.: ОГИЗ, 1941.

[4] Табачников С. Л. Вокруг четырех вершин. *Успехи матем. наук*, 1990, **45**(1), 191–192.

[5] Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. Свойства выборочных функций и их приложения. Пер. с англ. Ю. К. Беляева и М. П. Ершова под ред. Ю. К. Беляева. М.: Мир, 1969.

[6] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.

[7] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. I. Изд. 3-е. Пер. с нем. З. Либина, Б. Лившица и Ю. Рабиновича. М.–Л.: ГИТТЛ, 1951.

С. Б. Куксин

1996-8

См. комментарии к задаче *1970-15*.

1996-13

См. комментарии к задаче *1970-15*.

1996-15

Группа сохраняющих конус $x^2+y^2=z^2$ линейных преобразований действует на двуполостном гиперболоиде, сохраняя метрику Лобачевского, заданную пересечением касательной плоскости гиперболоида с бесконечно близким гиперболоидом. На однополостном гиперболоиде такая метрика лоренцева. Проектируя гиперболоиды на проективную плоскость проходящих через начало координат лучей, мы получаем метрику модели Клейна плоскости Лобачевского внутри круга и метрику Де Ситтера на дополнительной плоскости.

В. И. Арнольд

1996-20

Задача имеет своим источником теорему Эрмана [1–2], согласно которой инвариантный тор гамильтоновой системы (или симплектоморфизма), движение на котором квазипериодично, автоматически *изотропен*, если только симплектическая структура точна. В частности, в случае точной симплектической структуры все инвариантные торы теории КАМ изотропны и, следовательно, их размерность не превышает числа степеней свободы. Эти вопросы подробно обсуждаются в книге [3], см. также более раннюю статью [4].

[1] Herman M. R. Existence et non existence de tores invariants par des difféomorphismes symplectiques. Palaiseau: École Polytech., Centre de Math., 1988. (Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles 1987–1988, Exp. № 14.)

[2] Herman M. R. Inégalités “a priori” pour des tores lagrangiens invariants par des difféomorphismes symplectiques. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 1989, **70**, 47–101.

[3] Broer H. W., Huitema G. B., Sevryuk M. B. Quasi-Periodic Motions in Families of Dynamical Systems: Order amidst Chaos. Berlin: Springer, 1996. (Lecture Notes in Math., 1645.)

[4] Quispel G. R. W., Sevryuk M. B. KAM theorems for the product of two involutions of different types. *Chaos*, 1993, **3**(4), 757–769.

М. Б. Севрюк

1996-21

Приведем пример поля с фазовым пространством M, отличным от $\mathbb{R}^n$, не являющегося обратимым, но с обратимым отображением фазового потока за время 1.

Пусть M — несвязное объединение двух экземпляров $\mathbb{R}^2_1$ и $\mathbb{R}^2_2$ плоскости $\mathbb{R}^2$ с полярными координатами (r_1, φ_1) и (r_2, φ_2) соответственно. Введем обозначение $f(r) := r(r^2 - 1)$ и рассмотрим векторное поле V на M, задающее систему уравнений

$$\begin{cases} \dot\varphi_1 = 2\pi \\ \dot r_1 = f(r_1), \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot\varphi_2 = 4\pi \\ \dot r_2 = -f(r_2). \end{cases}$$

Это поле не является обратимым относительно никакой инволюции фазового пространства M.

Действительно, предположим, что некоторая инволюция $G\colon M \to M$ обращает поле V. Так как $\gamma_1 = \{r_1 = 1\} \subset \mathbb{R}^2_1$ — единственная периодическая траектория поля V периода 1, а $\gamma_2 = \{r_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2_2$ — единственная периодическая траектория поля V периода 1/2, то $G(\gamma_1) = \gamma_1$, $G(\gamma_2) = \gamma_2$ и, следовательно, $G(\mathbb{R}^2_1) = \mathbb{R}^2_1$, $G(\mathbb{R}^2_2) = \mathbb{R}^2_2$. Таким образом, мы заключаем, что каждая из систем на $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot\varphi = 2\pi \\ \dot r = f(r) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dot\varphi = 4\pi \\ \dot r = -f(r), \end{cases}$$

взятая по отдельности, обратима, что неверно: единственное положение равновесия $r = 0$ первой системы является аттрактором, а второй — репеллером.

С другой стороны, отображение фазового потока поля V за время 1 совпадает с отображением фазового потока за время 1 для поля, задающего систему

$$\begin{cases} \dot\varphi_1 = 0 \\ \dot r_1 = f(r_1), \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot\varphi_2 = 0 \\ \dot r_2 = -f(r_2). \end{cases}$$

Последняя обратима относительно инволюции

$$(\varphi_1, r_1) \mapsto (\varphi_2, r_2), \qquad (\varphi_2, r_2) \mapsto (\varphi_1, r_1),$$

переставляющей $\mathbb{R}^2_1$ и $\mathbb{R}^2_2$.

Пример векторного поля со свойствами, указанными во второй части задачи, мне неизвестен ни на каком фазовом пространстве.

М. Б. Севрюк

1997

1997-8

Вероятно, в точке, к которой стягивается «коническая окрестность» пирамиды, имеются модули и даже функциональные модули. Идея доказательства устойчивости в окрестности основной части каустики (скажем, при $A \neq 0$ в примере 3) состоит в следующем.

Зафиксируем значения параметров A_0, a_0, b_0, c_0, при которых функция семейства имеет четыре вещественные критические точки с разными значениями. Близкое семейство тоже имеет четыре вещественные критические точки. Значения четырех параметров этого близкого семейства можно подобрать так, чтобы критические значения функции близкого семейства совпали с критическими значениями нашего тригонометрического многочлена. Соответствующая функция на окружности получается из этого тригонометрического многочлена малым диффеоморфизмом окружности (он определен однозначно).

Эта конструкция продолжается затем по нашим четырем параметрам вплоть до каустики (границы существования четырех критических точек) и даже несколько далее (в аналитическом случае, когда можно следить за критическими значениями в комплексных точках). Так можно доказать голоморфную устойчивость в «конической окрестности» каустики. В гладком случае обоснование возможности продолжения нормализующего диффеоморфизма за каустику аналогично использованию подготовительной теоремы Мальгранжа в аналогичной локальной задаче. Эту конструкцию здесь, однако, придется применять не к росткам функций в точке, а к функциям на окружности.

В. И. Арнольд

1997-9

Первая строка таблицы показывает, что движение слева направо в каждой тройке является своего рода комплексификацией. Таким образом, октаэдр должен оказаться в каком-то таинственном смысле комплексификацией тетраэдра, а икосаэдр — октаэдра. Число ребер каждого из правильных многогранников равно $k(k+1)$, где $k=1+1$ для вещественного случая (тетраэдр), $k=1+2$ для комплексного случая (октаэдр), $k=1+4$ для кватернионного случая (икосаэдр).

Параллелизм строк $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ и E_6, E_7, E_8 был отмечен Д. А. Кажданом в лекции на юбилее И. М. Гельфанда в Ратгерсе (1993). Его аргументы были теоретико-числовые.

Параболические унимодальные особенности P_8, X_9, J_{10} примыкают соответственно к простым особенностям E_6, E_7, E_8 и их огораживают; связь между этими двумя троицами хорошо изучена. Интересно, однако, что при рассмотрении краевых особенностей (или особенностей мероморфных функций) встречаются еще две родственные огораживающие тройки унимодальных особенностей. Одна из этих троек состоит из трех семейств коразмерности 5:

$$P_8^{\#}=\frac{x}{xy+y^3+ay^2z+z^3},$$
$$X_9^{\#}=\frac{x}{x^2+axy^2+y^4+z^2},$$
$$J_{10}^{\#}=\frac{x}{x^3+ax^3y+y^3+z^2}.$$

Связь этой тройки с остальными нашими троицами долго оставалась незамеченной (так что обозначения соответствующих особенностей в списках 1978 г. никак не связаны с P_8, X_9, J_{10}).

A_3 — это группа симметрий тетраэдра, B_3 — октаэдра, H_3 — икосаэдра. Способ получения троицы E_6, E_7, E_8 из троицы A_3, B_3, H_3 хорошо известен. Например, можно взять сизигии трех инвариантов соответствующей бинарной группы, действующей в $\mathbb{C}^2$, и получить поверхность с особенностью E_6, E_7 или E_8 в $\mathbb{C}^3$ в виде фактора $\mathbb{C}^2$ по этой бинарной группе, после чего группа E_6 (E_7, E_8) восстанавливается как группа монодромий этой особенности.

Другой способ перехода от строки A_3 к строке E_6 доставляет соответствие МакКая: расширенная диаграмма Дынкина E_6 (E_7, E_8) описывает разложение на неприводимые тензорного произведения неприводимого представления нужной группы A_3 (B_3, H_3) на стандартное представление.

Переход от строки A_3 к строке D_4 доставляется разложением конусов Спрингера на камеры Вейля. Числа камер в восьми симплициальных конусах, на которые плоскости трех зеркал, ограничивающих камеру Вейля, делят $\mathbb{R}^3$, суть, соответственно:

$$\begin{aligned} A_3:&\ 24 = 2(1+3+3+5),\\ B_3:&\ 48 = 2(1+5+7+11),\\ H_3:&\ 120 = 2(1+11+19+29). \end{aligned}$$

Увеличивая числа в скобках на 1, получаем веса инвариантов для

$$D_4:\ 2,4,4,6; \quad F_4:\ 2,6,8,12; \quad H_4:\ 2,12,20,30.$$

Эти веса, между прочим, доставляют числа вершин, граней и ребер тетраэдра, октаэдра и икосаэдра (двойки, возможно, соответствуют трехмерным граням).

Связь трех чертежных треугольников (с углами $\frac{\pi}{a}$, $\frac{\pi}{b}$, $\frac{\pi}{c}$) с параболическими особенностями P_8, X_9, J_{10} хорошо известна. Например, показатели квазиоднородности параболических особенностей

$$P_8:\ \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1\right);\ X_9:\ \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1\right);\ J_{10}:\ \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1\right)$$

доставляют все решения уравнения $\frac{\pi}{a}+\frac{\pi}{b}+\frac{\pi}{c}=\pi$ суммы углов плоского треугольника. Напомню, что правильные многогранники связаны с решениями

$$\begin{aligned} A_3:&\ \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{6}\right);\\ B_3:&\ \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{12}\right);\\ H_3:&\ \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{30}\right) \end{aligned}$$

формулы суммы углов сферического треугольника $\frac{\pi}{a}+\frac{\pi}{b}+\frac{\pi}{c}=\pi+\frac{\pi}{h}$. Заметим, что числа Кокстера h соответствующих групп (D_4, F_4, H_4) равны числам ребер тетраэдра, октаэдра и икосаэдра соответственно.

Двулистное накрытие Мёбиуса $\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\mathbb{S}^0} S^1$ (отображающее край листа Мёбиуса на его базу) превращается при комплексификации в расслоение Хопфа $\mathbb{S}^3 \xrightarrow{\mathbb{S}^1} S^2$. Здесь первая окружность отображения Мёбиуса должна рассматриваться как $\mathrm{SO}(2)$, превращаясь при комплексификации в $\mathrm{SU}(2) \approx \mathbb{S}^3$. Вторая окружность отображения Мёбиуса должна рассматриваться как $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$, превращаясь при комплексификации в $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \approx S^2$. Пара точек $\mathbb{S}^0$ при комплексификации превращается в точку из $\mathbb{S}^1$ (например, потому что O/SO превращается в U/SU). Итак, накрытие Мёбиуса превращается при комплексификации в расслоение Хопфа $\mathbb{S}^3 \to S^2$. Появление второго расслоения Хопфа $\mathbb{S}^7 \to S^4$ при кватернионизации расслоения Мёбиуса столь же естественно.

Комплексификация стратификации расслоения собственных векторов симметрических матриц без кратных собственных чисел (рассмотренных вместе с монодромией соответствующего накрытия в статье [1]) приводит к естественной связности в расслоении собственных векторов эрмитовых матриц без кратных собственных чисел (рассмотренной в работе [2]). Мы заключаем, во-первых, что связность в комплексном векторном расслоении и ее кривизна доставляют комплексификацию накрытию и его монодромии, а во-вторых, что у теорий фазы Берри и квантового эффекта Холла должен быть еще один аналог (причем вещественная коразмерность особенности, соответствующей «кратности корней», должна равняться пяти).

Чтó играет в этом кватернионном случае роль векторного расслоения и связности, предстоит еще уточнить, но роль кривизны должна играть некоторая 4-форма (А. М. Габриэлов сообщил мне, что в изученных им с И. М. Гельфандом и М. В. Лосиком выражениях формы Понтрягина через полилогарифмы появлялись функции с тремя полюсами на S^2 там, где в случае классов Черна полюсов было два).

Эллиптические числа описаны в статье [3]. Строка таблицы, начинающаяся с когомологий, предложена А. Б. Гивенталем, и я не берусь ее комментировать.

См. также комментарий к задаче *1998-16.*

[1] Арнольд В. И. Моды и квазимоды. *Функц. анализ и его прилож.*, 1972, **6**(2), 12–20. [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 189–202.]

[2] Arnol′d V. I. Remarks on eigenvalues and eigenvectors of Hermitian matrices, Berry phase, adiabatic connections and quantum Hall effect. *Selecta Math.* (*N. S.*), 1995, **1**(1), 1–19. [*Перевод на русский язык в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 583–604.]

[3] Frenkel′ I. B., Turaev V. G. Elliptic solutions of the Yang–Baxter equation and modular hypergeometric functions. In: The Arnol′d–Gel′fand Mathematical Seminars: Geometry and Singularity Theory. Editors: V. I. Arnol′d, I. M. Gel′fand, V. S. Retakh and M. Smirnov. Boston, MA: Birkhäuser, 1997, 171–204.

В. И. Арнольд

* * *

1997-9

Частичный ответ на вопрос о комплексификации связности и кривизны дан в [1–2]: это (0, 1)-связность и ее кривизна, внешне умноженная на соответствующую мероморфную форму на многообразии. В этих же работах основана теория «полярных гомологий», являющаяся комплексным аналогом вещественной теории сингулярных (или клеточных) гомологий. В статье [3] формула вычетов Коши–Лере как комплексный аналог формулы Стокса применяется к бесконечномерным калибровочным группам. Соответствующая программа построения калибровочных теорий на комплексных многообразиях обсуждается в [4].

См. также комментарий к задаче *1998-16*.

[1] Khesin B. A., Rosly A. A. Symplectic geometry on moduli spaces of holomorphic bundles over complex surfaces. In: Proceedings of the Arnol′dfest (Toronto, 1997). Editors: E. Bierstone et al. *Fields Institute Commun.* (to appear).

[2] Khesin B. A., Rosly A. A. Holomorphic linking and homology of complex manifolds (in preparation).

[3] Frenkel′ I. B., Khesin B. A. Four-dimensional realization of two-dimensional current groups. *Commun. Math. Phys.*, 1996, **178**(3), 541–562.

[4] Donaldson S. K., Thomas R. P. Gauge theory in higher dimensions. In: The Geometric Universe. Science, Geometry, and the Work of Roger Penrose. Papers from Symp. on geometric issues in the foundations of science held in honor of the 65th birthday of Sir Roger Penrose (Oxford, June 1996). Editors: S. A. Huggett, L. J. Mason, K. P. Tod, S. T. Tsou and N. M. J. Woodhouse. Oxford: Oxford Univ. Press, 1998, 31–47.

Б. А. Хесин

1998

1998-1

Теория Картана аналогична алгебраической геометрии: доказываемые утверждения справедливы при сколь угодно глубоких вырождениях, но остается неясным, как обстоит дело в случаях конечной (и даже малой) коразмерности рассматриваемого вырождения в пространстве всевозможных систем. С этим связано и ограничение аналитическим случаем (в теореме Картана–Кэлера и других подобных ситуациях): бесконечно вырожденные системы удается исследовать только за счет аналитичности исходных данных, гладкий же случай остается неразобранным, даже когда коразмерность вырождения невелика.

При подходе не с точки зрения алгебраической геометрии, а с точки зрения теории особенностей, основным является вопрос о коразмерностях всевозможных вырождений и о версальных деформациях, т. е. о тех вырождениях, которые встречаются в типичных семействах систем, зависящих от конечного (или даже малого) числа параметров. В частности, как всегда, интересен вопрос о простых (не имеющих модулей) особенностях и о конечно определенных (не имеющих функциональных модулей) особенностях дифференциальных систем (как гладких, так и аналитических).

См. также комментарий к задаче *1993-28.*

В. И. Арнольд

1998-2

Кубическая поверхность имеет четыре параболические кривые и шесть специальных точек, как доказал Б. Сегре [1].

Недавно (в 1997 г.) Д. А. Панов построил поверхность с всего одной параболической кривой, имеющую зато 12 специальных точек [2]. См. также ряд примыкающих сюда результатов и гипотез в более ранней статье [3].

[1] Segre B. The Non-singular Cubic Surfaces. Oxford: Oxford Univ. Press, 1942.

[2] Панов Д. А. Параболические кривые и градиентные отображения. *Труды МИРАН им. В. А. Стеклова*, 1998, **221**, 271–288.

[3] Арнольд В. И. Замечания о параболических кривых на поверхностях и многомерной теории Мёбиуса–Штурма. *Функц. анализ и его прилож.*, 1997, **31**(4), 3–18.

В. И. Арнольд

1998-3

Существование трех (соответственно двух) параболических кривых доказано для малых значений параметра в любом однопараметрическом семействе деформаций общего положения указанной поверхности [1].

[1] Арнольд В. И. Замечания о параболических кривых на поверхностях и многомерной теории Мёбиуса–Штурма. *Функц. анализ и его прилож.*, 1997, **31**(4), 3–18.

В. И. Арнольд

1998-4

Примеры гиперболических функций доставляют обобщенные сферические функции первой степени (удовлетворяющие уравнению $\Delta u + 2u = 0$, где Δ — сферический лапласиан, почти всюду). Нечетные обобщенные сферические функции первой степени имеют не менее шести логарифмических полюсов (см. [1]).

Вопрос о параболических кривых не решен даже для рациональных обобщенных сферических функций первой степени.

[1] Арнольд В. И. Замечания о параболических кривых на поверхностях и многомерной теории Мёбиуса–Штурма. *Функц. анализ и его прилож.*, 1997, **31**(4), 3–18.

В. И. Арнольд

1998-5, а также *1969-2*

Для аналитических g или h существование поверхности с заданным гессианом h или с заданной гауссовой кривизной g следует из теоремы Коши–Ковалевской. Если $g(0) \neq 0 \neq h(0)$, то поверхность существует и без требования аналитичности.

Если критическая точка 0 функции g или h с критическим значением ноль конечнократна, то поверхность с право-эквивалентной этой функции гауссовой кривизной (гессианом) существует. Но не ясно, можно ли избавиться от эквивалентности, т. е. от замены переменной, отождествляющей точку поверхности с точкой плоскости (см. [1]).

В статье [1] доказано также, что морсовская критическая точка гессиана (или гауссовой кривизны) в точке уплощения не может быть точкой минимума, и что параболическая кривая в такой точке не может иметь особенности E_6 (диффеоморфной особенности кривой $x^3 = y^4$ в нуле).

[1] Arnol'd V. I. On the problem of realization of a given Gaussian curvature function. CEREMADE (UMR 7534), Université Paris-Dauphine, № 9809, 12/02/1998; *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 1998, **11**(2), 199–206. [*Интернет*: `http://www.botik.ru/~duzhin/arnold/arn-papers.html`]

В. И. Арнольд

1998-6

Число точек уплощения кривой общего положения оценивается снизу «штурмовостью» этой кривой, не меняющейся при допустимых регулярных гомотопиях (см. [1]).

Все кривые, близкие к нашей кривой, имеют не меньше четырех точек уплощения, так как у нее есть выпуклая проекция. Некоторые из этих близких кривых имеют нулевую штурмовость. Однако вовсе не ясно, можно ли уничтожить их точки уплощения допустимыми перестройками: кроме штурмовости, этому могут препятствовать и другие, еще не известные, инварианты.

[1] Арнольд В. И. К лежандровой теории Штурма пространственных кривых. *Функц. анализ и его прилож.*, 1998, **32**(2), 1–7.

В. И. Арнольд

* * *

1998-6

Согласно [1], две точки уплощения гладкой замкнутой кривой общего положения $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to \mathrm{P}^3$, вложенной в трехмерное вещественное проективное пространство, образуют *связанную пару*, если соответствующие им вершины ласточкиных хвостов на фронте касательных к γ плоскостей являются концевыми точками линии l самопересечения фронта. Эта линия может иметь точки возврата и точки тройного самопересечения общего положения.

Ориентируем двойственную кривую γ^*, двойственное пространство P^{3*} и линию l. Точку возврата c линии l назовем *положительной* (*отрицательной*), если положительно (отрицательно) ориентирована следующая тройка векторов в $T_c\mathrm{P}^{3*}$:

1) касательный вектор к γ^*;

2) направляющий вектор односторонней полукасательной к l в точке c;

3) вектор в касательной плоскости к гладкой ветви фронта в точке c, указывающий направление отклонения ветви l, выходящей из c, от касательной к l в c.

Модуль разности между числом положительных и числом отрицательных точек возврата на линии l не зависит от выбора ориентаций. Это число будем называть *весом* связанной пары точек уплощения кривой γ, соответствующих концевым точкам линии l.

Две связанные пары точек уплощения *перемежаются*, если при обходе кривой после точки одной пары следует точка другой. Точки уплощения перемежающихся связанных пар будем называть *основными* точками уплощения кривой.

Определение. Связанная пара точек уплощения кривой называется *тривиальной*, если ее вес равен 2, а точки пары разбивают кривую на две открытые дуги, одна из которых не содержит основных точек уплощения.

Кривая γ определяет весовую хордовую диаграмму D_γ неупорядоченных пар точек окружности $\mathbb{S}^1$, являющихся прообразами нетривиальных связанных пар точек уплощения, и снабженных весами этих пар. Две такие диаграммы называются *эквивалентными*, если одна переводится в другую диффеоморфизмом окружности $\mathbb{S}^1$, сохраняющим ориентацию.

Определение. Класс эквивалентности диаграммы D_γ называется *диаграммой нетривиальных уплощений* кривой γ.

Замечание. *Штурмовость* кривой, введенная в [1], равна числу связанных пар точек уплощения, перемежающихся с нечетным числом других связанных пар, т. е. равна числу хорд диаграммы нетривиальных уплощений кривой, пересекающихся с нечетным числом других хорд. В частности, штурмовость кривой не превосходит числа всех хорд диаграммы нетривиальных уплощений, т. е. числа нетривиальных связанных пар точек уплощения кривой.

Теорема. *Диаграмма нетривиальных уплощений гладкой замкнутой кривой общего положения, вложенной в трехмерное проективное пространство, является инвариантом допустимых регулярных гомотопий кривой. В частности, число нетривиальных связанных пар точек уплощения кривой не меняется при таких гомотопиях.*

Инвариантность диаграммы нетривиальных уплощений кривой следует из рассуждений работы [1] на с. 5, как и инвариантность штурмовости кривой.

Следствие. *Число точек уплощения кривой в процессе допустимых гомотопий не может стать меньше удвоенного числа нетривиальных связанных пар точек уплощения исходной кривой.*

Пока не ясно, можно ли допустимыми гомотопиями уничтожить любую тривиальную связанную пару точек уплощения кривой. Рассмотрим, например, кривую γ: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \cos 3t$. Она находится не в общем положении (имеет три пары точек, в которых соприкасающиеся плоскости совпадают). Диаграмма нетривиальных уплощений всякой достаточно близкой кривой $\tilde{\gamma}$ имеет один из следующих двух типов:

1) пустая диаграмма (без хорд; кривая $\tilde{\gamma}$ имеет три тривиальные связанные пары точек уплощения; для каждой пары линия самопересечения фронта, связывающая соответствующие ласточкины хвосты, имеет две точки возврата одного и того же знака);

2) диаграмма с двумя пересекающимися хордами веса 0 (кривая $\tilde{\gamma}$ имеет две перемежающиеся и одну тривиальную связанные пары точек уплощения; линия самопересечения фронта, связывающая ласточкины хвосты, соответствующие тривиальной паре, имеет две точки возврата одного и того же знака; линия самопересечения фронта, связывающая ласточкины хвосты, соответствующие нетривиальной паре, имеет две точки возврата противоположных знаков).

Число точек уплощения кривой $\tilde{\gamma}$ с непустой диаграммой нетривиальных уплощений не может стать меньше 4 в процессе допустимых гомотопий. Можно ли допустимыми гомотопиями уничтожить все 6 точек уплощения кривой $\tilde{\gamma}$ с пустой диаграммой нетривиальных уплощений — неизвестно.

[1] Арнольд В. И. К лежандровой теории Штурма пространственных кривых. *Функц. анализ и его прилож.*, 1998, **32**(2), 1–7.

В. Д. Седых

1998-8

См. комментарии к задаче *1985-22*.

1998-9, а также *1980-14*, *1981-12*, *1984-15* и *1988-16*

Первый дискриминант — это многообразие многочленов с кратными корнями в a-пространстве; фундаментальная группа дополнения к нему — это группа кос.

Второй дискриминант — это бифуркационная диаграмма функций в пространстве с координатами $(a_1, \ldots, a_{n-1})$. О нем идет речь в предыдущей задаче.

Начиная с третьего дискриминанта, проекция общего положения и проекция забывания координаты не совпадают.

Ср. [1] (§ 2), см. также задачи *1972-27* и *1993-27*.

[1] Arnol′d V. I. On some problems in singularity theory. In: Geometry and Analysis. Papers dedicated to the memory of V. K. Patodi. Bangalore: Indian Acad. Sci., 1980, 1–9. [*Reprinted in*: *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 1981, **90**(1), 1–9.]

В. И. Арнольд

1998-10

Хотя группа кос и является комплексификацией $\pi_1(\mathbb{C}^n \setminus \Delta)$ симметрической группы $\pi_0(\mathbb{R}^n \setminus \Delta)$, комплексификация кос вряд ли сводится к исследованию коммутативной группы $\pi_3(\mathbb{H}^n \setminus \Delta)$ (где Δ — диагонали). Возможно, вместо π_3 надо рассматривать $\pi_1(\Omega^2)$, где Ω^2 — второе пространство петель с некоторым условием типа «голоморфности».

По поводу кос из двух нитей см. задачи *1998-14* и *1999-12*.

При комплексификации индекса Маслова отображение $\det^2 : \mathrm{U/O} \to \to S^1$ должно было бы превратиться в некое отображение $\mathrm{Sp/U} \to S^2$. «Индекс» становится тогда *двумерным* классом когомологий, как и должно быть (вещественная коразмерность каустики равна двум). Но что за «кватернионный определитель» кватернионных матриц из Sp (определитель с комплексными на U значениями) участвует в этой конструкции?

Комплексификация сигнатурного определения индекса также приводит к интересным топологическим конструкциям, связанным с многообразием вырожденных комплексных симметрических матриц и расслоением собственных векторов над его дополнением.

В. И. Арнольд

* * *

1998-10

Задача обобщения инвариантов Васильева на комплексный случай обсуждается в книге [1].

[1] Arnol′d V. I., Khesin B. A. Topological Methods in Hydrodynamics. New York: Springer, 1998. (Appl. Math. Sci., 125.) [*Перевод на русский язык*: Арнольд В. И., Хесин Б. А. Топологические методы в гидродинамике. М.: ФАЗИС, готовится к изданию.]

Б. А. Хесин

1998-11

А. М. Габриэлов (и А. Г. Хованский?) обнаружили, что этот вопрос, во-первых, отнюдь не прост (не угадывается даже главный член асимптотики), а во-вторых, — что ответ может иметь важные приложения.

В. И. Арнольд

1998-12

Сейчас этот вопрос уже решен (положительно) [1].

[1] Арнольд В. И. Топологические вопросы теории асимптотических кривых. *Труды МИРАН им. В. А. Стеклова*, 1999, **225**, 11–20. [*Интернет*: `http://www.botik.ru/~duzhin/arnold/arn-papers.html`]

1998-13

Локальная плотность — это функция от производных *ограниченного* порядка поля скоростей в точке области течения (по которой эту плотность надлежит проинтегрировать, чтобы получить сохраняющуюся величину). Классическими сохраняющимися величинами для уравнения Эйлера являются энергия и обобщенные энстрофии (интегралы всевозможных функций от величины завихренности) в двумерном случае, энергия и спиральность (асимптотический инвариант Хопфа, измеряющий среднюю зацепленность траекторий) в трехмерном. Аналогичные законы сохранения есть и на многомерных римановых многообразиях. Четномерный случай аналогичен двумерному, нечетномерный — трехмерному. Для евклидовой геометрии это установили Л. Тартар и Д. Серр, а для римановой — В. Ю. Овсиенко, Ю. В. Чеканов и Б. А. Хесин.

Кроме энергии, эти интегралы сохраняются не только вдоль траекторий уравнения Эйлера, но и вдоль орбит коприсоединенного представления. Иными словами, они имеют одинаковые значения для всех полей, изозавихренных с данным (так что вихри этих полей переводятся друг в друга сохраняющими объемы диффеоморфизмами). Подробности см. в книге [1].

Предположительно неклассических сохраняющихся интегралов от локальных плотностей нет уже для уравнения Эйлера на почти всякой римановой поверхности (для многообразий со специальной симметрией, например, для стандартной сферы или стандартного тора, такие дополнительные законы сохранения есть). Доказать несуществование неклассических интегралов, сохраняющихся вдоль орбит, быть может, легче, так как их меньше. Еще легче, быть может, было бы доказать несуществование сохраняющихся интегралов от универсальных[1] (не зависящих от области течения) плотностей (это предложил Ж.-П. Серр).

В случае евклидовой геометрии доказано несуществование неклассических законов сохранения интегралов от плотностей, зависящих лишь от производных не выше первого порядка (Д. Серр [2–3]).

[1] Arnol′d V. I., Khesin B. A. Topological Methods in Hydrodynamics. New York: Springer, 1998. (Appl. Math. Sci., 125.) [*Перевод на русский язык*: Арнольд В. И., Хесин Б. А. Топологические методы в гидродинамике. М.: ФАЗИС, готовится к изданию.]

[2] Serre D. Les invariants du premier ordre de l'équation d'Euler en dimension 3. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A–B*, 1979, **289**(4), A267–A270.

[3] Serre D. Les invariants du premier ordre de l'équation d'Euler en dimension trois. *Physica D*, 1984, **13**(1–2), 105–136.

В. И. Арнольд, Б. А. Хесин

---

[1] В таком же смысле, в каком универсальны классические плотности.

1998-14

«Умножение» дистрибутивно справа относительно «сложения»: $(a+b)c = ac + bc$. А. Дольд указал, что наше «сложение» действительно некоммутативно уже в случае группы $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$: это следует из доказанной И. М. Джеймсом гомотопической некоммутативности операции $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$, сопоставляющей паре кватернионов (a, b) произведение ab.

Задача возникла из попытки комплексифицировать группу кос из двух нитей (ср. задачи *1998-10* и *1999-12*).

В. И. Арнольд

1998-15

Разумеется, речь не идет о гомоморфизмах мультипликативной структуры. Многообразие кватернионных матриц, задающих вырожденные операторы $\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$, имеет вещественную коразмерность четыре в пространстве всех кватернионных матриц. Является ли оно (в вещественном смысле) полным пересечением четырех гиперповерхностей?

Определитель соответствующей *комплексной* матрицы порядка $2n$ — *вещественный* многочлен, обращающийся в 0 на подмногообразии коразмерности четыре. Является ли он суммой (четырех?) квадратов вещественных многочленов? Если квадратов больше, то возникает вопрос о «сизигиях» — соотношениях между ними.

Аналогичный вопрос интересен также для дискриминантов характеристических уравнений симметрических (эрмитовых, гиперэрмитовых, ...) матриц, см. статьи [1–2].

[1] Арнольд В. И. Родственники фактора комплексной проективной плоскости по комплексному сопряжению. *Труды МИРАН им. В. А. Стеклова*, 1999, **224**, 56–67.
[*Интернет*: `http://www.botik.ru/~duzhin/arnold/arn-papers.html`]

[2] Илюшечкин Н. В. Дискриминант характеристического многочлена нормальной матрицы. *Матем. заметки*, 1992, **51**(3), 16–23.

В. И. Арнольд

* * *

1998-15

Пусть $A\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ — кватернионно-линейный (скажем, слева, т. е. $A(qv) = qA(v)$ для всех $q \in \mathbb{H}$, $v \in \mathbb{H}^n$) оператор. «Окомплексифицирование» оператора A есть комплексно-линейный оператор ${}^{\mathbb{C}}A\colon \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^{2n}$. Пусть

$$H(A) := \det {}^{\mathbb{C}}A.$$

Легко видеть, что H — вещественнозначный многочлен, $H(A) \geqslant 0$ для любого A, а уравнение $H(A) = 0$ определяет конус Σ вещественной коразмерности 4. Задача сводится к изучению идеала I алгебраического многообразия Σ.

Теорема. *Многочлен $H(A)$ может быть представлен в виде суммы четырех квадратов рациональных функций, но при $n \geqslant 2$ он не может быть разложен в сумму квадратов никакого числа вещественных многочленов.*

С. В. Дужин

* * *

1998-15

Проблеме кватернионного определителя посвящена обширная литература. Из самых последних работ укажем, например, [1–2], а из более ранних — [3–4]. В статьях [1, 4] подробно изложена история вопроса и приведена обширная библиография.

[1] Aslaksen H. Quaternionic determinants. *Math. Intelligencer*, 1996, **18**(3), 57–65.

[2] Казарян М. Э. Замечание о собственных векторах и собственных значениях гиперэрмитовых матриц. Препринт, 1998. [*Интернет*: `http://www.botik.ru/~duzhin/as-papers/`]

[3] Гельфанд И. М., Ретах В. С. Детерминанты матриц над некоммутативными кольцами. *Функц. анализ и его прилож.*, 1991, **25**(2), 13–25.

[4] Гельфанд И. М., Ретах В. С. Теория некоммутативных детерминантов и характеристические функции графов. *Функц. анализ и его прилож.*, 1992, **26**(4), 1–20.

М. Б. Севрюк

1998-16

Сами понятия одномерного голоморфного расслоения, его связности и формы кривизны являются комплексификациями понятий накрытия, монодромии и первого класса Уитни.

При второй комплексификации комплексные числа должны стать кватернионами, уравнения Коши–Римана должны, по-видимому, стать нелинейными, 2-форма кривизны должна превратиться в 4-форму «гиперкривизны», класс Черна — в класс Понтрягина.

Теория квантового эффекта Холла и теория фазы Берри являются комплексификациями теории Вигнера – фон Неймана расталкивания собственных чисел квадратичных форм. При второй комплексификации формы должны стать гиперэрмитовыми (инвариантными относительно действия компактной группы Sp вещественными квадратичными формами на кватернионном пространстве).

Эти вопросы обсуждаются в работах [1–7], см. также комментарии к задаче *1997-9*.

[1] Арнольд В. И. Моды и квазимоды. *Функц. анализ и его прилож.*, 1972, **6**(2), 12–20. [*Перепечатано в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 189–202.]

[2] Arnol′d V. I. Remarks on eigenvalues and eigenvectors of Hermitian matrices, Berry phase, adiabatic connections and quantum Hall effect. *Selecta Math.* (*N. S.*), 1995, **1**(1), 1–19. [*Перевод на русский язык в сборнике*: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60. М.: ФАЗИС, 1997, 583–604.]

[3] Казарян М. Э. Замечание о собственных векторах и собственных значениях гиперэрмитовых матриц. Препринт, 1998. [*Интернет*: `http://www.botik.ru/~duzhin/as-papers/`]

[4] Арнольд В. И. Таинственные математические троицы. Принцип топологической экономии в алгебраической геометрии. М.: Изд-во МЦНМО, МК НМУ, 1997.

[5] Arnol′d V. I. Symplectization, complexification and mathematical trinities. The second Toronto lecture (1997). *Fields Institute Commun.* (to appear); CEREMADE (UMR 7534), Université Paris-Dauphine, № 9815, 04/03/1998. [*Интернет*: `http://www.botik.ru/~duzhin/arnold/arn-papers.html`]

[6] Arnol′d V. I. Polymathematics: is mathematics a single science or a set of arts? CEREMADE (UMR 7534), Université Paris-Dauphine, № 9911, 10/03/1999; In: Mathematics — Its Frontiers and Perspectives. Intern. Math. Union, 2000 (to appear). [*Интернет*: `http://www.botik.ru/~duzhin/arnold/arn-papers.html`]

[7] Арнольд В. И. Родственники фактора комплексной проективной плоскости по комплексному сопряжению. *Труды МИРАН им. В. А. Стеклова*, 1999, **224**, 56–67.
[*Интернет*: `http://www.botik.ru/~duzhin/arnold/arn-papers.html`]

В. И. Арнольд

1998-17, а также *1995-12*

Основой теоремы Лиувилля является естественная аффинная структура на слоях лагранжева расслоения симплектического многообразия. На слоях лежандрова расслоения контактного многообразия имеется естественная проективная структура. Нет сомнения, что ее можно использовать для построения проективного обобщения теории вполне интегрируемых систем в контактной геометрии (что может быть полезным даже для теории уравнений с частными производными). Странным образом, до сих пор никто, кажется, этого не сделал.

Задача присутствует уже в книге [1] (см. с. 22–23).

[1] Арнольд В. И. Лекции об уравнениях с частными производными. Изд. 2-е, дополн. М.: ФАЗИС, 1997.

В. И. Арнольд

* * *

1998-17, а также *1995-12*

По-видимому, косимметрии, введенные В. И. Юдовичем [1–4], играют такую же роль для контактных систем (т. е. динамических систем, подчиненных контактному распределению), что и дополнительные первые интегралы — для гамильтоновых. Аналог вполне интегрируемой гамильтоновой системы — это векторное поле, лежащее в пересечении $n+1$ контактной структуры [или контактная система в $(2n+1)$-мерном пространстве, имеющая n косимметрий]. Для такой системы теорема Фробениуса об интегрируемости n-мерного распределения — пересечения всех косимметрий — является аналогом условия инволютивности первых интегралов в гамильтоновом случае. Это, видимо, частично отвечает на вопрос об аналоге теоремы интегрируемости Лиувилля для контактных систем. Слой рассматриваемого n-мерного распределения-пересечения является лежандровым для любой косимметрии.

Параллелизм (гамильтоновы системы, первые интегралы, условие инволютивности) $\cong$ (контактные системы, косимметрии, теорема Фробениуса) становится еще более явным, если вполне интегрируемую гамильтонову систему задать не набором n первых интегралов в инволюции для одной и той же симплектической структуры, а одним гамильтонианом и n согласованными симплектическими структурами.

[1] Юдович В. И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции. *Матем. заметки*, 1991, **49**(5), 142–148.

[2] Yudovich V. I. Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it. *Chaos*, 1995, **5**(2), 402–411.

[3] Yudovich V. I. Cosymmetry and dynamical systems. In: Proc. of the 3rd Intern. Congress on Industrial and Applied Mathematics (Hamburg, July 1995). Editors: E. Kreuzer and O. Mahrenholtz. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1996, **76**, suppl. 4, 556–559.

[4] Юдович В. И. Теорема о неявной функции для косимметрических уравнений. *Матем. заметки*, 1996, **60**(2), 313–317.

Б. А. Хесин

1998-18

Г. Хофер доказал существование замкнутых орбит у хоферовских полей на соответствующих многообразиях (например, на $\mathbb{S}^3$). Поэтому решение этой задачи доставило бы новые результаты о существовании замкнутых траекторий в магнитной задаче.

Заметим, что задающее магнитную задачу векторное поле обладает еще дополнительным свойством: векторы поля лежат в плоскостях некоторой (другой) контактной структуры фазового пространства (эта структура есть тавтологическая контактная структура пространства контактных элементов).

Было бы интересно исследовать, насколько каждое из условий — хоферовости и подчиненности второй контактной структуре — ограничивают возможности построения контрпримеров к гипотезе Зейферта о существовании периодических орбит векторного поля на трехмерной сфере (впрочем, для бездивергентных полей неизвестны уже гладкие контрпримеры).

В. И. Арнольд

1998-19

М. Л. Концевич и Е. И. Коркина, которым я сообщил об этой задаче, доказали также следующие близкие утверждения. Сопоставим решетке в евклидовом пространстве два числа: наибольший радиус r открытых шаров с центрами в точках решетки, которые попарно не пересекаются, и наименьший радиус R замкнутых шаров с центрами в точках решетки, которые покрывают всё пространство.

Тогда произведение r(решетки) $\cdot$ R(двойственной решетки) ограничено снизу и сверху зависящими лишь от размерности n постоянными c и C соответственно.

Коркина указала, что $c = 1/4$, причем эта оценка точна, а $C \leqslant$ $\leqslant \left(\sqrt{3}/4\right) \sqrt{(4/3)^n - 1}$, причем эта оценка неточна.

Она доказала также, что произведение длин кратчайших ненулевых векторов в исходной и в двойственной решетках не превосходит $\left(2/\sqrt{3}\right)^{n-1}$.

Все эти результаты должны бы быть известны уже Минковскому, но, кажется, не были замечены и его последователями, см. [1].

[1] Arnol′d V. I. Higher dimensional continued fractions. *Reg. Chaot. Dynamics*, 1998, **3**(3), 10–17.

В. И. Арнольд

* * *

1998-19

К этой задаче тесно примыкают следующие результаты из геометрии чисел. Сопоставим решетке L ранга n в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ два числа: наибольший радиус $r(L)$ попарно не пересекающихся открытых шаров с центрами в точках решетки (радиус упаковки) и наименьший радиус $R(L)$ покрывающих всё пространство замкнутых шаров с центрами в точках решетки (радиус покрытия). Длина $\lambda_1(L)$ кратчайшего вектора в решетке L равна $2r(L)$. Пусть L^* — решетка, двойственная к L, т. е.

$$L^* := \{\mathbf{a}^* \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{a}^*, \mathbf{a}) \in \mathbb{Z} \text{ для всех } \mathbf{a} \in L\}.$$

Имеют место следующие неравенства, полученные, по-видимому, впервые в статье [1]:

$$\frac{1}{4} \leqslant \lambda_1^2(L) \cdot R^2(L^*) \leqslant \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} (\gamma_i^*)^2,$$

где

$$\gamma_k^* := \max_{i=1}^{k} \gamma_i,$$

а γ_i — константы Эрмита [2]:

$$\gamma_i := \sup_{\Lambda} \left\{ \frac{\lambda_1^2(\Lambda)}{\det^{2/i}(\Lambda)}, \ \Lambda \text{ — } i\text{-мерная решетка} \right\},$$

здесь $\det(\Lambda)$ — i-мерный объем основного параллелепипеда решетки Λ.

Нижняя оценка неулучшаема. Верхнюю оценку, так как $\gamma_i^* \leqslant 2i/3$ для любого $i \geqslant 2$ и $\gamma_1^* = 1$, можно записать в виде (см. [1])

$$\lambda_1(L) \cdot R(L^*) \leqslant \frac{1}{2} n^{3/2}.$$

Итак, с учетом $\lambda_1(L) = 2r(L)$ имеют место оценки

$$\frac{1}{4} \leqslant r(L) \cdot R(L^*) \leqslant \frac{1}{4} n^{3/2}. \tag{1}$$

В обзоре [3] (p. 751) была упомянута гипотеза (W. Banaszczyk, 1991, ср. книгу [4], p. 43–44), что показатель 3/2 в верхней оценке (1) можно понизить до 1. Эта гипотеза доказана В. А. Юдиным аналитическими методами в работе [5]:

$$r(L) \cdot R(L^*) \leqslant \frac{n}{4\pi}(1 + o(n)) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

[1] Lagarias J. C., Lenstra H. W., Jr., Schnorr C.-P. Korkin–Zolotarëv bases and successive minima of a lattice and its reciprocal lattice. *Combinatorica*, 1990, **10**(4), 333–348.

[2] Gruber P. M., Lekkerkerker C. G. Geometry of Numbers. Amsterdam: North-Holland, 1987. (North-Holland Math. Library, 37.)

[3] Gruber P. M. Geometry of numbers. In: Handbook of Convex Geometry, Vol. B. Editors: P. M. Gruber and J. M. Wills. Amsterdam: North-Holland, 1993, 739–763.

[4] Banaszczyk W. Additive Subgroups of Topological Vector Spaces. Berlin: Springer, 1991. (Lecture Notes in Math., 1466.)

[5] Юдин В. А. Две экстремальные задачи для тригонометрических полиномов. *Матем. сборник*, 1996, **187**(11), 145–160.

Н. П. Долбилин

1998-20

В симплектическом случае ответ, кажется, получается расширением части списка A, D, E (некоторые классы которого делятся на симплектические подклассы) [1–3].

Наиболее простой в этих случаях оказывается классификация *стабильно простых* особенностей (остающихся простыми, т. е. не имеющими модулей, при вложении контактного или симплектического пространства в пространство большей размерности).

Между прочим, такая стабилизация упрощает и классификацию простых особенностей кривых в обычном пространстве [1, 4–5].

[1] Арнольд В. И. Простые особенности кривых. *Труды МИРАН им. В. А. Стеклова*, 1999, **226**, 27–35. [*Английская версия*: Simple singularities of curves. CEREMADE (UMR 7534), Université Paris-Dauphine, № 9906, 09/02/1999.]
[*Интернет*: `http://www.botik.ru/~duzhin/arnold/arn-papers.html`]

[2] Arnol′d V. I. First steps of local symplectic algebra. CEREMADE (UMR 7534), Université Paris-Dauphine, № 9902, 20/01/1999; In: Differential Topology, Infinite-Dimensional Lie Algebras, and Applications. D. B. Fuchs' 60th Anniversary Collection. Editors: A. Astashkevich and S. Tabachnikov. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999, 1–8. (AMS Translations, Ser. 2, 194; Advances in Math. Sci., 44.)
[*Интернет*: `http://www.botik.ru/~duzhin/arnold/arn-papers.html`]

[3] Arnol′d V. I. First steps of local contact algebra. CEREMADE (UMR 7534), Université Paris-Dauphine, № 9909, 10/02/1999; *Canad. J. Math.*, 1999 (to appear).
[*Интернет*: `http://www.botik.ru/~duzhin/arnold/arn-papers.html`]

[4] Bruce J. W., Gaffney T. J. Simple singularities of mappings $(\mathbb{C},0) \to$ $\to (\mathbb{C}^2,0)$. *J. London Math. Soc., Ser.* 2, 1982, **26**(3), 465–474.

[5] Gibson C. G., Hobbs C. A. Simple singularities of space curves. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1993, **113**(2), 297 310.

В. И. Арнольд

1998-21

Гипотеза Пенроуза состоит в том, что, даже когда гомологический коэффициент зацепления равен нулю, зацепленность всё же имеет место (в смысле невозможности растащить лежандровы подмногообразия контактной или даже обычной изотопией).

Вопрос становится нетривиальным после прохождения сопряженных точек, когда на «конусе» в пространстве-времени, образованном выходящими из точки световыми геодезическими, появляются ласточкины хвосты.

Задача обсуждается в статьях [1–2].

[1] Low R. J. Twistor linking and causal relations. *Classical Quantum Gravity*, 1990, **7**(2), 177–187.

[2] Low R. J. Twistor linking and causal relations in exterior Schwarzschild space. *Classical Quantum Gravity*, 1994, **11**(2), 453–456.

В. И. Арнольд

1998-22

Ясно, что число симплексов не меньше cn. Дж. Хасс и Дж. Лагариас доказали, что это число не больше Cn^2. Эта лемма составляет основу их доказательства того, что незаузленную кривую в $\mathbb{R}^3$ с n двойными точками проекции можно превратить в окружность не более, чем Ke^{Ln} перестройками Рейдемейстера.

Естественно задаться вопросом, как растет минимальное число перестроек в близких задачах, таких, как 1) распознавание эквивалентности двух узлов; 2) распознавание лежандровой эквивалентности двух лежандровых узлов (или хотя бы тривиальности); 3) распознавание J^+-эквивалентности иммерсированных в плоскость кривых.

Однако в случаях 2) и 3) не доказана даже алгоритмическая разрешимость задачи (т. е. существование *какой-либо* рекурсивной функции, оценивающей сверху необходимое число перестроек).

Работа Хасса и Лагариаса докладывалась на Берлинском международном конгрессе математиков 1998 г. [1].

[1] Hass J., Lagarias J. The number of Reidemeister moves needed for unknoting. In: ICM 1998, International Congress of Mathematicians, Abstracts of short communications and poster sessions. Berlin–Bielefeld: Univ. Bielefeld Publ., 1998, 89.

В. И. Арнольд

1998-24

Уравнение означает равенство нулю кривизны линий уровня, являющихся для решения, следовательно, прямыми.

В. И. Арнольд

* * *

1998-24

Используя стандартные методы группового анализа [1], легко описать все уравнения, обладающие указанным свойством. Например, в обозначениях Монжа $p = u_x$, $q = u_y$, $r = u_{xx}$, $s = u_{xy}$, $t = u_{yy}$ общий вид уравнения второго порядка с неизвестной функцией $u = u(x, y)$, разрешенного относительно s и такого, что любая функция от решения снова является решением, есть

$$s = \frac{1}{2}\left(\frac{pt}{q} + \frac{qr}{p}\right) + \phi\left(x, y, p, q, \frac{pt}{q} - \frac{qr}{p}\right),$$

где ϕ — произвольная однородная степени 1 по последним трем аргументам функция.

[1] Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. Под ред. А. М. Виноградова и И. С. Красильщика. М.: Факториал, 1997.

С. В. Дужин

1998-25

Для матриц второго порядка такой выбор доставляет объединение плоскости сильвестровых матриц $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{smallmatrix}\right)$ с прямой диагональных матриц $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$. Для матриц не сильно более высокого порядка такой выбор тоже возможен.

Вычисления чисел классов эквивалентности матриц над конечными полями подсказывают, по-видимому, что подобный выбор возможен и при любом порядке, но описание соответствующего варианта жордановых нормальных форм приводит к нетривиальной комбинаторике.

В. И. Арнольд

* * *

1998-25

Отметим, что в случае матриц второго порядка объединение плоскости всех диагональных матриц $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$ с прямой жордановых клеток $\left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$ *не удовлетворяет* условию задачи, потому что плоскость $\left\{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)\right\}$ содержит *два* представителя $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)$ и $\left(\begin{smallmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ каждого класса подобных матриц с простым спектром (λ, μ).

1999

1999-8, а также *1999-9*

В настоящем комментарии мы дадим полные доказательства (простых и хорошо известных) свойств полугруппы $S(a)$ при $n = 2$, упомянутых в условиях задач *1999-8* и *1999-9*, а также доказательство существования числа $K(a)$ при любом $n \geqslant 2$ (последний факт также прост и хорошо известен).

Пусть $1 \leqslant u < v$ — натуральные числа и НОД$(u, v) = 1$. Обозначим число $(u-1)(v-1)$ через $K(u, v)$. Для краткости мы будем писать K вместо $K(u, v)$ и S вместо $S(u, v)$.

Лемма 1. *Любое целое число N можно единственным образом представить в виде*

$$N = ru + sv, \qquad r \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant r \leqslant v-1, \quad s \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Доказательство. Так как НОД$(u, v) = 1$, то все v чисел N, $N - u$, $\ldots$, $N - (v-1)u$ дают разные остатки при делении на v. В частности, ровно одно из этих чисел кратно v.

Лемма 2. *Целое число N принадлежит полугруппе S тогда и только тогда, когда в представлении* (1) $s \geqslant 0$.

Доказательство. Если $s \geqslant 0$, то по определению $N \in S$. Пусть теперь $s < 0$. Если $N = \tilde{r}u + \tilde{s}v$, где $\tilde{r} \geqslant 0$ и $\tilde{s}$ — целые числа, то $\tilde{r} \geqslant r$, откуда $\tilde{s} \leqslant s < 0$. Поэтому $N \notin S$.

Теорема 3 (двойственность Сильвестра [1]; см. также [2–5]). *Целое число N принадлежит полугруппе S тогда и только тогда, когда число $K - 1 - N$ ей не принадлежит.*

Доказательство. Если $N = ru + sv$ — представление (1) числа N, то

$$K - 1 - N = uv - u - v - (ru + sv) = (v - 1 - r)u + (-1 - s)v$$

— аналогичное представление числа $K - 1 - N$. Из двух целых чисел s и $-1 - s$ ровно одно неотрицательно. Поэтому согласно лемме 2 из двух целых чисел N и $K - 1 - N$ ровно одно лежит в полугруппе S.

Такая симметрия полугруппы S и ее дополнения носит еще название «горенштейновости» (плоской кривой $x = t^u$, $y = t^v$), ср. [3].

Следствие 4. $K - 1 \notin S$.

Действительно, $K - 1 - (K - 1) = 0 \in S$.

Следствие 5. $N \in S \quad \forall N \geqslant K$.

Действительно, $\forall N \geqslant K$ имеем $K - 1 - N < 0$, а потому $K - 1 - N \notin S$.

Пусть теперь $n \geqslant 2$ и $1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ — натуральные числа, причем НОД$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$.

Теорема 6. *Существует такое целое* $K = K(a) \in \mathbb{Z}_+$, *что* $N \in S(a)$ *для всех* $N \geqslant K$.

Доказательство (индукцией по n). При $n = 2$ утверждение теоремы справедливо с $K(a) = (a_1 - 1)(a_2 - 1)$ согласно следствию 5. Пусть $n \geqslant 3$, НОД$(a_1, \ldots, a_{n-1}) = d \in \mathbb{N}$, и $N \in S(a_1/d, \ldots, a_{n-1}/d)$ при всех $N \geqslant \widehat{K}$ для некоторого $\widehat{K} \in \mathbb{Z}_+$. Положим

$$K = d\widehat{K} + (d-1)a_n,$$

и пусть $N \geqslant K$. Рассмотрим d чисел N, $N - a_n$, $\ldots$, $N - (d-1)a_n$. Все они не меньше $d\widehat{K}$ и среди них ровно одно кратно d, так как НОД$(d, a_n) = 1$ (ср. с доказательством леммы 1). Пусть это число есть $N - ra_n = ds$, $s \geqslant \widehat{K}$. Тогда $s \in S(a_1/d, \ldots, a_{n-1}/d)$, а потому и $N = ds + ra_n \in S(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Статистика чисел $K(a)$ связана с т. н. слабыми асимптотиками (асимптотиками, усредненными по сдвигам и вращениям пространства) чисел целых точек в областях и на поверхностях в $\mathbb{R}^l$ (ср. [5]), см. комментарий к задаче *1981-26*.

[1] Sylvester J. J. Mathematical questions with their solutions. *Educational Times*, 1884, **41**, 21.

[2] Herzog J. Generators and relations of Abelian semigroups and semigroup rings. *Manuscripta Math.*, 1970, **3**(2), 175–193.

[3] Kunz E. The value-semigroup of a one-dimensional Gorenstein ring. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1970, **25**(4), 748–751.

[4] Арнольд В. И. Простые особенности кривых. *Труды МИРАН им. В. А. Стеклова*, 1999, **226**, 27–35. [*Английская версия*: Simple singularities of curves. CEREMADE (UMR 7534), Université Paris-Dauphine, № 9906, 09/02/1999.]
[*Интернет*: `http://www.botik.ru/~duzhin/arnold/arn-papers.html`]

[5] Арнольд В. И. Слабые асимптотики чисел решений диофантовых задач. *Функц. анализ и его прилож.*, 1999, **33**(4), 65–66.

М. Б. Севрюк

1999-9

См. комментарий к задаче *1999-8*.

1999-10, а также *1999-11*

Асимптотические плотности $p(N)$ и $P(N)$ надо понимать следующим образом. Зафиксируем (жорданову) область U — например, шар или куб — в пространстве $\mathbb{R}^n \ni a$. Зафиксируем большое число M и рассмотрим все целые точки $a \in MU$, для которых $\text{НОД}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$. Для каждой такой a рассмотрим полугруппу $S(a)$ и вычислим $K(a)$.

Образы целых точек из $\mathbb{Z}_+^n$ при нормированной проекции

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad k \mapsto \frac{\langle k, a\rangle}{K(a)}$$

образуют локально конечное множество. На нем в качестве меры возьмем атомарную меру, для которой мера точки либо всегда равна 1, либо равна числу спроектированных в эту точку целых точек $k \in \mathbb{Z}_+^n$.

Полученную таким образом меру $\mu_a(x)$ — функционал, скажем, на непрерывных или гладких функциях — усредним по $a \in MU$ (можно даже с какой-нибудь плотностью $\rho(a)$).

Основная гипотеза. *Для любой «хорошей» функции $f(x)$ отношение интеграла по этой усредненной мере к интегралу по мере с плотностью Cx^{n-1}, где $C = M^{n-1}c$, а c — усредненный по $a \in U$ $(n-1)$-мерный объем симплекса*

$$\{k \in \mathbb{R}^n \mid \langle k, a\rangle = 1,\ k_1 > 0,\ k_2 > 0,\ \ldots,\ k_n > 0\},$$

сходится при $M \to \infty$ к единице.

В. И. Арнольд

1999-11

См. комментарий к задаче *1999-10.*

1999-12

См. комментарии к задачам *1998-10* и *1998-14.*

1999-15

О $\mathbb{R}$–$\mathbb{C}$–$\mathbb{H}$-троичности см. задачу *1997-9* и комментарии к ней, а также задачи *1988-24*, *1998-15* и *1998-16* и комментарии к ним.

Указатель авторов комментариев

(с номерами задач)

Издательство ФАЗИС http://www.aha.ru/~phasis

Книги В. И. Арнольда
в издательстве ФАЗИС

ВЫШЛИ В СВЕТ:

«Особенности каустик и волновых фронтов»
серия БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИКА, вып.1
1996

«Владимир Игоревич Арнольд. Избранное–60»
1997

«Лекции об уравнениях с частными производными»
серия БИБЛИОТЕКА СТУДЕНТА-МАТЕМАТИКА, вып.2
1997, 1999

«Задачи Арнольда»
2000

ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ:

«...Наши речи за 10 шагов не слышны...»
(публицистика)

«Волновые фронты и топология кривых»
серия БИБЛИОТЕКА СТУДЕНТА-МАТЕМАТИКА

а также сборники, содержащие статьи В.И.Арнольда:

«Математика: границы и перспективы»
перевод с английского

«Математические события XX века»